现代数学基础丛书 128

泛函微分方程的相空间理论及应用

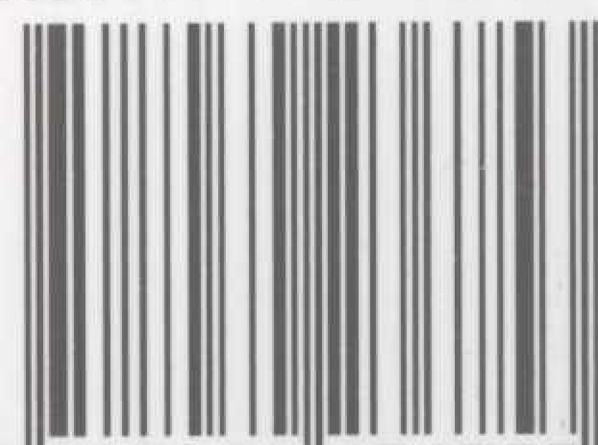
王克 范猛 著



科学出版社

www.sciencep.com

(O-3478.0101)



ISBN 978-7-03-023675-3

销售分类建议：高等数学

定 价：65.00 元

现代数学基础丛书　128

泛函微分方程的相空间理论及应用

王　克　范　猛　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书是作者在泛函微分方程理论的多年研究工作的基础上写成的，着重介绍具有无限时滞泛函微分方程的相空间理论及其应用. 本书共 8 章，主要包括：一般相空间理论及其应用、$\mathscr{C}_h$空间及其应用、$\mathscr{C}_g$空间及其应用、伪度量相空间、 可变时滞泛函微分方程的局部理论、相空间理论在生物数学中的应用、具有无限时滞的泛函方程的基本理论、时标动力学方程的周期性等.

本书可供数学专业的研究生、教师和科研人员阅读，也可供相关领域(如力学、生物学、工程技术等)的教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

泛函微分方程的相空间理论及应用/王克，范猛著. —北京：科学出版社，2009

(现代数学基础丛书；128)

ISBN 978-7-03-023675-3

I. 泛… II. ①王…②范… III. 泛函分析-微分方程-相空间 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 016263 号

责任编辑：王丽平 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 4 月第一次印刷 印张：20
印数：1—2 500 字数：390 000

定价：65.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换<明辉>)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

序

大量物理学、生物学、控制理论和工程应用课题表明：无穷时滞系统无论从理论还是从应用角度看，都是十分重要的研究方向. 20 世纪 70 年代以后，逐渐成形的无穷时滞泛函微分方程理论当然是有限时滞泛函微分方程的直接推广. 然而此时相空间的确立并不容易，不是一帆风顺的，因为记号 $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r, 0]$，当 r 为 $+\infty$ 时，对 $t > \sigma, x_\sigma$ 都是 x_t 在 $(-\infty, \sigma]$ 上的一个限制，亦即 $x_\sigma(\theta) = x(\sigma+\theta)$ 是 $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ 在 $(-\infty, \sigma]$ 上的一段. 因此记号 x_t 对一切 t 都摆脱不了 x_σ 的直接影响. 传统的上确界模 $\|\cdot\|$ 对表述解的性态用处不大，因为 $\|x_t\| \to 0$ 是不可能的，除非 $x(t) \equiv 0$. 所以要使无穷时滞泛函微分方程理论有所进展，就必须增添某种体现"衰减记忆"的假定，以摆脱初始函数无时不在的直接影响. 换句话说，应该把这种设想公理化，以确定合适的相空间.

建立相空间的工作从 Coleman 开头，经 J. K. Hale 与 J. Kato 的总结后，有了一个符合逻辑的开始. 数十年来不断完善、简化，使之日臻完善. 从某种意义上说，无穷时滞泛函微分方程的发展水平完全取决于相空间理论的进展状况.

该书的作者王克教授和范猛教授长期致力于研究这种相空间. 可以说，正是有了他们在相空间理论上的创新与成就，才使得有限时滞的一系列理论结果顺利地推广到无穷时滞系统上去，如周期解与概周期解的存在性、稳定性，以及解的渐近性、有界性的判断准则，半群理论等. 特别是 Volterra 型积分微分方程，当它们含有无穷分布时滞的情形，效果显著.

全书通顺清晰，相信初次涉足无穷时滞泛函微分方程的读者必能从中确立必备的研究基础. 书中所列结果对应用领域的工作更可随需要引用.

这是一本专著，也是一本很出色的研究生教材. 我非常乐于把此书推荐给年轻的同行们.

郑祖庥

2008 年 8 月 18 日

前　言

在自然科学和工程技术研究中, 许多现象的数学模型均由常微分方程所描述, 这些问题实际上都是假定事物的变化规律只与当时的状态有关, 而和过去的历史状态无关. 大量的事实说明, 许多事物的变化规律不仅依赖于当前的状态, 而且与历史的状态有关, 在这种情况下, 常微分方程就不能精确地描述客观事物了. 严格地讲, 在动力学系统中时滞通常是不可避免的, 即使是以光速传递的信息系统也不例外. 在这个意义下, 用常微分方程去描述事物的状态和发展变化的过程只是动力学系统的一种近似的刻画. 为了更精确地描述客观世界, 必须考虑时间滞后的影响, 这就必然导致泛函微分方程. 泛函微分方程是具有时间滞后的微分方程, 用于描述既依赖于当前状态也依赖于历史状态的发展系统, 其特点是充分考虑到系统的历史对现状的影响, 泛函微分方程比常微分方程更为精确地描述了客观世界, 因而在力学、控制理论、生物学、管理学、经济学及流行病学等许多领域中都有广泛的应用, 一直受到学术界的高度重视, 具有非常重要的理论意义和应用价值. 泛函微分方程是现代应用数学的一个重要分支, 其解的动力学性质的研究是现代数学的热门问题之一. 从实际应用的角度看, 如果需要考虑的时滞比较大或时滞的界难以确定, 则采用无限时滞的泛函微分方程在数学处理上通常比较方便.

相空间理论是泛函微分方程理论研究中的一个重要课题, 是研究其他问题的基础和工具. 对于不同类型的方程和不同的具体问题, 可以采用不同形式的相空间. 对于具有有限时滞的泛函微分方程, 相空间的选取对所研究的问题没有太大的影响, 所以在有限时滞的泛函微分方程的研究中, 几乎都是采用连续函数加上确界模所构成的空间. 然而在无限时滞的泛函微分方程的研究中, 相空间的选取与具体问题的解决有着密切的关系. 在许多涉及无限时滞泛函微分方程的理论和应用问题的研究中, 相空间的合理选取会对问题的解决起到很大的促进作用. 相空间理论是无限时滞泛函微分方程研究中的重要方向和有力工具.

国内外已经出版的一些泛函微分方程著作均对相空间理论作了初步介绍, 但不够深入. 特别是近年来, 具有无限时滞的泛函微分方程的相空间理论获得了长足的发展, 取得了大量深刻的研究成果, 极大地促进了泛函微分方程的研究. 但国内外尚无系统介绍具有无限时滞的泛函微分方程相空间理论及应用的著作, 本书是泛函

微分方程相空间理论及应用的比较系统的总结, 希望本书的出版能够填补这方面的空白, 同时也为有志在这方面开展研究工作的同志们提供一本入门的教材. 我们也相信, 本书的问世一定会促进相空间理论的进一步发展, 拓广应用相空间理论解决无限时滞泛函微分方程的理论及应用问题的范围, 也将对应用领域的研究和实际问题的解决起到促进作用.

本书的内容绝大部分取自作者多年来的研究成果, 并广泛参考和汲取了这个领域国内外同行散布于文献中的最新研究工作. 本书比较全面系统地介绍具有无限时滞的泛函微分方程的相空间理论及其应用方面的最新、最重要的成果. 全书共分 8 章, 主要内容包括一般相空间理论及其应用、$\mathscr{C}_h$ 空间及其应用、$\mathscr{C}_g$ 空间及其应用、伪度量相空间、可变时滞泛函微分方程的局部理论、相空间理论在生物数学中的应用、具有无限时滞的泛函方程的基本理论、时标动力学方程的周期性等. 对各类教材中普遍介绍的内容, 不作详细的介绍, 同时限于篇幅, 我们不可能把国内外的工作一一介绍, 但有关文献尽可能列出.

本书两位作者的老师——东北师范大学已故的黄启昌教授是我国相空间理论研究的主要开拓者和倡导者. 1983 年, 黄先生邀请他的合作者 —— 美国著名数学家 T.A.Burton 教授来东北师范大学数学系访问. 讲学期间, Burton 教授报告了他们关于 $\mathscr{C}_g$ 空间的研究工作, 使我们初步了解了相空间理论在无限时滞泛函微分方程研究中的重要性. 1984 年, 黄先生在文献 [87] 中使用了一个与 $\mathscr{C}_g$ 空间完全不同的相空间, 但这个空间的构造比较特殊, 使用上不太方便. 在黄先生的指导下, 1985 年, 本书第一作者 [164,165] 提出并建立了 $\mathscr{C}_h$ 空间理论. 大量的后续研究工作表明, 这种新的相空间具有许多优良的性质. 例如, $\mathscr{C}_h$ 空间是一个 Banach 空间, 因其具有完备性, 所以在其中可以施行极限运算, 可以使用多数的不动点定理等. 以 $\mathscr{C}_h$ 空间理论为基础, 本书两位作者在相空间理论及其应用方面做了大量研究, 很多研究工作都是黄先生悉心指导和参与的. 在黄先生生前, 本书作者多次提议和黄先生共同出版本书, 先生总是出于谦虚而婉拒. 但他对本书的写作一直给予鼓励和支持. 他曾和本书作者约定, 当本书出版时, 为本书撰写序言. 现在这已经是不可能的事了, 成为作者的一大缺憾. 斯人虽逝，风范犹存. 本书的面世是对黄先生的纪念. 他所开创并参与的此方向的研究工作, 也一定会因本书的出版而得到进一步的发展. 先生若天堂有知，一定会感到欣慰.

本书初稿曾多次在东北师范大学和哈尔滨工业大学的青年教师、研究生讨论班上报告过, 参加讨论班的同志对本书提出了许多宝贵的意见, 特此表示感谢! 感谢安徽大学郑祖庥教授和哈尔滨工业大学崔明根教授对本书的支持! 作者对科学

出版社王丽平编辑及相关工作人员为本书的出版而付出的辛勤劳动深表谢意！作者还要对国家自然科学基金委员会、教育部科技发展中心、东北师范大学和哈尔滨工业大学的一贯支持，表示由衷的感谢！

限于作者的学识和水平，书中难免有疏漏及不当之处，殷切希望广大读者批评指正！

王　克　范　猛

2008 年 11 月

目　录

第 1 章　一般相空间理论及其应用

泛函微分方程是具有时间滞后的微分方程, 它用于描述既依赖于当前状态也依赖于过去状态的发展系统. 其特点是充分考虑到系统的历史对现状的影响, 因而在许多领域中都有重要的应用, 一直受到学术界的高度重视.

从发现第一个泛函微分方程 (functional differential equation, FDE) 至今已过去两个多世纪了, 但是系统的研究工作只是 20 世纪 50 年代才开始的, 具有有限时滞的泛函微分方程理论比较成熟, 文献 [73] 是这部分内容最完整的总结. 当时滞相当大的时候, 通常就把时滞考虑为无限的. 这样就得到了具有无限时滞的泛函微分方程. 例如,

$$x'(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^{\infty} x(t - r_j) + \int_{-\infty}^{t} k(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad r_j > 0 \tag{1.0.1}$$

和

$$N'(t) = aN(t)\left[1 - N_0^{-1}\int_{-\infty}^{0} N(t+s)\mathrm{d}\eta(s)\right] \tag{1.0.2}$$

就是具有无限时滞的泛函微分方程. 前者与核反应堆动力学有关, 而后者与人口模型有关. 对这类方程的研究, 自 Volterra 以来, 因引入泛函分析的方法而得到长足的发展. 这类方程的右端, 可以用函数空间中的算子来表示. 设 x 是定义在包含 $(-\infty, t]$ 的区间上的函数, 定义 $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$ 上的函数 x_t 为

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad -\infty < \theta \leqslant 0.$$

对定义在 $\mathbb{R}^-$ 上的函数 φ, 若令

$$f(t,\varphi) = A_0\varphi(0) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j\varphi(-r_j) + \int_{-\infty}^{0} k(t, t+\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{1.0.3}$$

则上述方程 (1.0.1) 就可以写为如下形式:

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{1.0.4}$$

这个方程的解要在使其右端泛函 (1.0.3) 有意义的范围中去寻找. 泛函 (1.0.3) 的定义域, 即 φ 所在的空间, 称为方程 (1.0.4) 的相空间. 用类似的方法, 也可以把方程

(1.0.2) 写成 (1.0.4) 的形式. 本书主要考虑具有形式 (1.0.4) 的具有无限时滞的泛函微分方程及其相空间问题. 对于不同的方程和不同的具体问题, 可以采用不同形式的相空间. 对于有限时滞的泛函微分方程, 相空间的选取没有大的影响, 所以在有限时滞的泛函微分方程的研究中, 几乎都是采用连续函数加上确界模所构成的空间[73], 然而在无限时滞的泛函微分方程的研究中, 相空间的选取与具体问题的解决有着密切的关系. 根据具体问题的区别, 所选取的相空间有时是连续函数空间, 有时是可积函数空间.

1969 年, Coleman 和 Mizel[30, 31] 曾对一些与系统的衰减记忆现象有关的几种相空间的结构和性质进行了研究. 研究发现, 不同的相空间具有一些共同的性质, 即对于处理基本问题时所需的那些定性性质, 但那里所定义的范数存在很大的缺陷. 为了克服文献 [30, 31] 的缺陷, Hale[70] 进一步把这些共同的性质抽象出来, 并引入了其他几条公理, 以公理形式给出相空间, 并在其上讨论具有无穷时滞的泛函微分方程. 1978 年, Hale 和 Kato[71] 以及 Schumacher[134, 135] 几乎同时确定了相空间的公理化基础, 对相空间分别建立了一套限制性的公理系统. 这两套公理系统虽然不同, 但十分相似. 之后, 一些学者[71, 134, 135] 对所给出的公理作了轻微的改进, 参见文献 [81, 92, 128, 133]. 1980 年, Kappel 和 Schappacher[94] 对 Hale 和 Kato 以及 Schumacher 提出[71, 134, 135] 的公理体系进行了深入的讨论和比较, 进一步加以详细阐明. Corduneanu 和 Lakshmikantham[33] 对具有无限时滞的泛函微分方程理论进行了详尽的总结, 系统地讨论了泛函微分方程研究中的一些课题, 文中附有 289 篇参考文献, 包含 1980 年以前的大量文献. 一些学者相继建立了一些更加便于应用的具体的相空间[5, 19, 67, 165, 166]. 相空间理论为无限时滞泛函微分方程的理论的建立奠定了基础, 极大地推动了无限时滞泛函微分方程理论的发展. 近年来, 相空间理论发展非常迅速, 涌现出了大量理论及应用成果.

近年来的大量研究工作表明, 在解决具体问题时, 适当地选取相空间可以起很大的促进作用, 是解决具体问题的有力工具. 例如, 在文献 [82], [133] 中, 利用相空间理论去解决具有无限时滞的泛函微分方程的概周期解的存在性和稳定性问题, 特别是文献 [133] 提到在适当选取相空间后, 由零解的渐近稳定性推出了零解的指数渐近稳定性. 文献 [96] 也利用相空间理论讨论具有无限时滞的泛函微分方程的零解的稳定性问题, 使我们看到在相空间中讨论稳定性问题具有独到的优点. 选取合适的相空间研究发展了具有无限时滞的泛函微分方程的半群理论[12, 127]. 关于进一步的详细情况, 可参见文献 [33]. 近年来的工作可参见文献 [19, 84, 102, 157, 189], 其中, 文献 [84] 比较详细地介绍了日本数学家在相空间理论特别是具有无限时滞的泛函微分方程方面的研究工作, 但文献 [84] 对国内学者的工作未作任何介绍. 自文献 [84] 出版以来, 又涌现了大量新的研究成果.

1.1 相空间的公理系统

设 $\mathscr{B}$ 是某一类映 $\mathbb{R}^-$ 到 $\mathbb{R}^n$(即 n 维 Euclidean 空间 (以下简称欧氏空间), 根据具体情况可选用 l_∞, l_1 或 l_2 范数) 的实函数所构成的向量空间, 并赋之以 半范数 $|\cdot|$. 对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 和任意 $\beta \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, 令 φ^β 表示 φ 在区间 $(-\infty, -\beta]$ 上的限制. 所有这样的函数所构成的空间记为 $\mathscr{B}^\beta$. 对 $\xi \in \mathscr{B}^\beta$, 定义其半范数

$$|\xi|_\beta = \inf\{|\psi| \ |\psi \in \mathscr{B}, \psi^\beta = \xi\}.$$

对 $\varphi \in \mathscr{B}$, 令 $|\varphi|_\beta = |\varphi^\beta|_\beta$, 这样, $|\cdot|_\beta$ 也是 $\mathscr{B}$ 上的半范数.

令 Ω 是 $\mathbb{R} \times \mathscr{B}$ 中的开集, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是给定的连续泛函, 其中 $\mathbb{R}$ 表示实数集合, 即 $(-\infty, \infty)$. 考虑如下泛函微分方程:

$$x'(t) = f(t, x_t). \tag{1.1.1}$$

若 $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, 一个定义在 $(-\infty, \sigma + A), 0 < A \leqslant \infty$ 上的 $\mathbb{R}^n$ 值的函数 $x(t)$ 称为是方程 (1.1.1) 的过 (σ, φ) 的解, 如果 $x_\sigma = \varphi$ 且当 $t \in [\sigma, \sigma + A)$ 时 $x(t)$ 连续可微, 并满足方程 (1.1.1). 方程 (1.1.1) 的上述解记为 $x(\sigma, \varphi)(t)$ 或 $x(t, \sigma, \varphi)$.

设相空间 $\mathscr{B}$ 满足下列条件:

(B_1) 对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 及 $A : 0 < A \leqslant \infty$, 若 x 是定义在 $(-\infty, A)$ 上满足 $x_0 = \varphi$ 的 $\mathbb{R}^n$ 值的函数且 x 在 $[0, A)$ 上连续, 则对任意 $t \in [0, A), x_t \in \mathscr{B}$ 且 x_t 关于 t 连续.

(B_2) 存在连续函数 $K(\beta) > 0$, 使得对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 和任意 $t \in \mathbb{R}^+$, 有

$$|\varphi| \leqslant K(\beta)|\varphi|^{[-\beta,0]} + |\varphi|_\beta$$

成立. 本书约定: 对 $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, 定义 $|x|^{[a,b]} := \sup\{|x(s)| \ |a \leqslant s \leqslant b\}$.

条件 (B_1) 和 (B_2) 可以保证方程 (1.1.1) 过 (σ, φ) 的解的存在性, 参见文献 [92]. 对任意 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 和任意 $\varphi \in \mathscr{B}$, 由条件 (B_1) 知函数 $\varphi(\beta + \theta), \theta \in (-\infty, -\beta]$, 属于 $\mathscr{B}^\beta$. 于是可以用如下方式定义线性算子 $\tau^\beta : \mathscr{B} \to \mathscr{B}^\beta$:

$$[\tau^\beta \varphi](\theta) = \varphi(\beta + \theta).$$

设空间 $\mathscr{B}$ 还满足

(B_3) 存在连续函数 $M(\beta) > 0$, 使得

$$|\tau^\beta \varphi|_\beta \leqslant M(\beta)|\varphi|$$

对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 和任意 $\beta \in \mathbb{R}^+$ 成立.

(B_4) 存在正数 K_1, 使得

$$|\varphi(0)| \leqslant K_1|\varphi|$$

对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 成立.

Sawano[133] 证明, 如果条件 $(B_1) \sim (B_4)$ 成立且存在连续函数 $n(t)$, 使得对任意 $(t,\varphi),(t,\psi) \in \Omega$ 有

$$|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \leqslant n(t)|\varphi - \psi|, \tag{1.1.2}$$

则 (1.1.1) 的初值解是唯一的, 并且初值解对初始条件具有连续相依性.

1978 年, 在 Hale 和 Kato[71] 共同确立相空间基本理论的同时, Kato 引入了"容许空间"的概念, 并应用其研究了无穷时滞泛函微分方程的稳定性. 近年来, 容许相空间的概念被广泛接受, 在无限时滞泛函微分方程的研究中发挥了重要作用.

定义 1.1.1　设 $(\mathscr{B},|\cdot|)$ 为线性赋范空间且满足条件 $(B_1),(B_4)$. 若存在定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的非负连续函数 $K(s),M(s)$, 使得对任意的 $t\in[\sigma,A]$, $x_\sigma \in \mathscr{B}$, 均有

$$|x_t| \leqslant K(t-\sigma)\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(s)| + M(t-\sigma)|x_\sigma|, \quad t \geqslant \sigma, \tag{1.1.3}$$

则称 $\mathscr{B}$ 为容许相空间.

定义 1.1.2　如果相空间 $\mathscr{B}$ 为容许的, $K(s)\equiv K$ 为常数且函数 $M(s)$ 满足

$$\lim_{s\to+\infty} M(s) = 0, \tag{1.1.4}$$

则称相空间 $\mathscr{B}$ 具有衰减记忆.

例 1.1.1　设 $\mathscr{C} = C(\mathbb{R}^-,\mathbb{R}^n)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^-$ 上的连续函数所构成的线性空间. 对任意实常数 $\gamma \in \mathbb{R}$, 定义

$$C_\gamma = \left\{\varphi\in\mathscr{C}\ \middle|\ \lim_{\theta\to-\infty} \mathrm{e}^{\gamma\theta}\varphi(\theta) \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 中存在}\right\}$$

且

$$|\varphi|_\gamma = \sup_{-\infty<\theta\leqslant 0} \mathrm{e}^{\gamma\theta}|\varphi(\theta)|, \quad \varphi\in C_\gamma,$$

则 $(C_\gamma,|\cdot|_\gamma)$ 是容许空间, 其中,

$$K_1 = 1, \quad K(t) = \max\{1,\mathrm{e}^{-\gamma t}\}, \quad M(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

此外, 此空间还具有很好的性质. 对 $\varphi\in C_\gamma$, 定义函数

$$u(s) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{\gamma s}{1+s}\right\}\varphi\left(\dfrac{s}{1+s}\right), & -1 < s \leqslant 0, \\ \lim\limits_{\theta\to-\infty} \mathrm{e}^{\gamma\theta}\varphi(\theta), & s = -1, \end{cases}$$

则 $u\in C([-1,0],\mathbb{R}^n)$. 变换

$$\mathcal{L}: C_\gamma \to C([-1,0],\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{L}(\varphi) = u, \quad \varphi\in C_\gamma$$

是从 C_γ 到 $C([-1,0],\mathbb{R}^n)$ 的等距同构.

1.2 相空间的衰减记忆与泛函微分方程解的稳定性

设 Ω 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是给定的连续泛函且 $f(t,0)\equiv 0$. 考虑如下泛函微分方程:

$$x'(t)=f(t,x_t). \tag{1.2.1}$$

定义 1.2.1 如果对任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $\sigma\geqslant 0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon,\sigma)>0$, 使得只要 $|\varphi|<\delta$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|<\varepsilon(|x_t(\sigma,\varphi)|<\varepsilon), t\geqslant\sigma$, 则称 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$稳定 ($\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 稳定) 的. 如果此外, 对任意 $\sigma\geqslant 0$, 还存在 $\delta_0=\delta_0(\sigma)>0$ 和 $\varepsilon>0$ 的函数 $T=T(\sigma,\varepsilon)$, 使得只要 $|\varphi|<\delta_0, t\geqslant\sigma+T$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|<\varepsilon$ ($|x_t(\sigma,\varphi)|<\varepsilon$), 则称 (1.2.1) 的零解为 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定 ($\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$渐近稳定) 的. 如果 δ,δ_0 和 T 都与 σ 无关, 则分别称零解是一致稳定和一致渐近稳定的.

定义 1.2.2 连续函数 $W(r):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 称为楔函数, 如果 $W(r)$ 严格增加,$W(0)=0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}W(r)=+\infty$.

1956 年, 对于具有有限时滞的滞后型泛函微分方程 (retarded functional differential equation, RFDE), Krasovskii 得到了下面关于其零解一致渐近稳定的经典结果:

定理 1.2.1 [98] 设 $V:\mathbb{R}^+\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^+$ 是连续的且满足

(i) $W_1(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant W_2(|\varphi|^{\mathscr{B}})$,

(ii) $V'_{(1.2.1)}(t,\varphi)\leqslant -W_3(|\varphi(0)|)$,

(iii) 当 φ 有界时,$f(t,\varphi)$ 有界,

则方程 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的, 其中,

$$\mathscr{B}=C([-h,0],\mathbb{R}^n),\quad |\varphi|^{\mathscr{B}}=\sup_{-h\leqslant s\leqslant 0}|\varphi(s)|,$$

h 为时滞, W_1,W_2,W_3 都是楔函数.

条件 (iii) 意味着对任意 $\mathscr{B}$ 中的有界集 D, 存在着常数 L_D, 使得对任意 $\varphi\in D$ 和任意 $t\in\mathbb{R}^+$, $|f(t,\varphi)|\leqslant L_D$ 成立.

对于具有无限时滞的 RFDE, 其零解的一致渐近稳定性非常复杂. 为了用 Lyapunov 第二方法研究 (1.2.1) 的零解的一致渐近稳定性, 通常需要找到一个 Lyapunov 泛函 $V(t,\varphi)$ 满足

$$W_1(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant W_2(|\varphi|). \tag{1.2.2}$$

1983 年, Burton[17] 提出了一个著名的猜想: 如果 (1.2.2) 成立且有

$$V'_{(1.2.1)}(t,x_t)\leqslant -W_3(|x(t)|), \tag{1.2.3}$$

则 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的 (若 $\mathscr{B} = BC$), 这里 W_1, W_2, W_3 都是楔函数, $BC \subset \mathscr{C}$ 表示定义在 $\mathbb{R}^-$ 上的有界连续函数所构成的线性空间, 并赋予上确界范数. 这个公开问题至今尚未解决.

文献 [17] 首次在 (1.2.3) 中引入 $W'_{(1.2.1)}(|x(t)|)$, 即

$$V'_{(1.2.1)}(t, x_t) \leqslant -W_3(|x(t)|) - |W'_{(1.2.1)}(|x(t)|)|, \tag{1.2.4}$$

其中, W 是楔函数, 若 $\mathscr{B} = BC$, 则可以证明 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的, 但需要 V 泛函是一致健忘的[17].

文献 [150] 指出, BC 空间不是容许相空间, 也不具有衰减记忆性质, 因而在许多问题的研究中, BC 空间不便于应用. 本节将在具衰减记忆的容许相空间中, 证明 (1.2.2) 和 (1.2.4) 可以保证 (1.2.1) 的零解是一致渐近稳定的, 并且不需要 V 泛函的一致健忘性, 这在应用中更为方便. 本节总设 $\mathscr{B}$ 是具有衰减记忆的容许相空间.

定理 1.2.2　*设存在泛函 $V(t, \varphi) : \mathbb{R}^+ \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}^+$ 及楔函数 $W_i(r)$, $i = 1, 2, 3$, $W(r)$, 使得对 (1.2.1) 的任意解 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t)$, $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B$, 有*

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x_t|)$;

(2) $V'_{(1.2.1)}(t, x_t) \leqslant -W_3(|x(t)|) - |W'_{(1.2.1)}(|x(t)|)|$,

则 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

证明　对任意的 $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{B}$, 由条件 (2) 知, 当 $t \geqslant \sigma$ 时, 有

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant V(\sigma, \varphi) \leqslant W_2(|\varphi|),$$

故

$$|x(t)| \leqslant W_1^{-1}(W_2(|\varphi|)), \quad t \geqslant \sigma. \tag{1.2.5}$$

由 (1.2.5) 知 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的.

若 $\liminf\limits_{t\to\infty} |x(t)| = a' > 0$, 则存在 $b > \sigma$, 当 $t \geqslant b$ 时有 $|x(t)| > \dfrac{a'}{2}$, 从而有

$$V'_{(1.2.1)}(t, x_t) \leqslant -W_3\left(\frac{a'}{2}\right), \quad t \geqslant b.$$

由此得

$$V(t, x_t) \leqslant V(b, x_b) - W_3\left(\frac{a'}{2}\right)(t - b), \quad t \geqslant b. \tag{1.2.6}$$

(1.2.6) 表明, 当 $t \to +\infty$ 时, $V(t, x_t) \to -\infty$, 这与条件 (1) 矛盾, 故有

$$\liminf_{t\to\infty} |x(t)| = 0. \tag{1.2.7}$$

若 $\limsup\limits_{t\to\infty} |x(t)| = a'' > 0$. 由 (1.2.7) 存在点列

$$\sigma < t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \cdots < t_n < t'_n < \cdots, \quad t_n \to \infty$$

满足 $|x(t_i)| = \frac{a''}{4}$, $|x(t_i')| = \frac{a''}{2}$, $i = 1, 2, \cdots$. 对任意固定的 n 有

$$\begin{aligned}
V(t_n', x_{t_n'}) &\leqslant V(t_1, x_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_n'} |W'_{(1.2.1)}(|x(s)|)| \mathrm{d}s \\
&\leqslant W_2(|x_{t_1}|) - \int_{t_1}^{t_n'} |W'_{(1.2.1)}(|x(s)|)| \mathrm{d}s \\
&\leqslant W_2(|x_{t_1}|) - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_i'} |W'_{(1.2.1)}(|x(s)|)| \mathrm{d}s \\
&\leqslant W_2(|x_{t_1}|) - n \left[W\left(\frac{a''}{2}\right) - W\left(\frac{a''}{4}\right) \right].
\end{aligned}$$

由此推得, 当 $n \to \infty$ 时有 $V(t_n', x_{t_n'}) \to -\infty$, 矛盾, 故有

$$\limsup_{t\to\infty} |x(t)| = 0. \tag{1.2.8}$$

综合 (1.2.7) 和 (1.2.8) 知, 对任意 $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{B}$ 有

$$\lim_{t\to\infty} |x(\sigma, \varphi)(t)| = 0. \tag{1.2.9}$$

因 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的, 故对任意 $\sigma \in \mathbb{R}^+$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $|\varphi| \leqslant \delta_1$ 时有 $|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant 1$, 从而当 $|\varphi| \leqslant \delta_1$ 时, 由定义 1.1.1 有

$$|x_t(\sigma, \varphi)| \leqslant K + M\delta_1, \quad t \geqslant \sigma,$$

其中, $M = \sup\limits_{t\geqslant\sigma} M(t-\sigma)$. 定义

$$S_{\delta_1} = \{\varphi \in \mathscr{B} | \ |\varphi| \leqslant \delta_1\}.$$

设 $\varphi \in S_{\delta_1}, \sigma \in \mathbb{R}^+$, 由 (1.2.9) 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T(\varepsilon, \varphi, \sigma) > 0$, 当 $t \geqslant \sigma + T$ 时有 $|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant \varepsilon$. 这样的 T 当然不是唯一的, 设

$$T^*(\varepsilon, \varphi, \sigma) = \inf T(\varepsilon, \varphi, \sigma).$$

下面要证明

$$\sup_{(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times S_{\delta_1}} \{T^*(\varepsilon, \varphi, \sigma)\} < +\infty. \tag{1.2.10}$$

如若不然, 则必存在 $(\sigma_n, \varphi_n) \in \mathbb{R}^+ \times S_{\delta_1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得

$$T^*(\varepsilon, \varphi_n, \sigma_n) > n. \tag{1.2.11}$$

由 (1.2.1) 的零解的 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定性知, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) > 0$, 使得对任意 $\sigma \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in B$, $|\varphi| \leqslant \varepsilon'$ 及 $t \geqslant \sigma$ 有

$$|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2.12}$$

因 $\mathscr{B}$ 是具衰减记忆的, 故可以选取 $S > 0$, 使得当 $r \geqslant S$ 时有

$$M(r) \leqslant M(S) \leqslant (M\delta_1 + K)^{-1}\frac{\varepsilon'}{2}. \tag{1.2.13}$$

对 (1.2.11) 中所定义的 $(\sigma_n, \varphi_n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{B}$, 定义

$$I_n = \left\{ s \in [\sigma_n, \sigma_n + n] \,\middle|\, |x(\sigma_n, \varphi_n)(s)| \geqslant \frac{\varepsilon'}{4K} \right\}.$$

由条件 (2) 有

$$\begin{aligned} V(\sigma_n + n, x_{\sigma_n+n}(\sigma_n, \varphi_n)) &\leqslant V(\sigma_n, \varphi_n) - \int_{\sigma_n}^{\sigma_n+n} W_3(|x(\sigma_n, \varphi_n)(s)|)\mathrm{d}s \\ &\leqslant W_2(|\varphi_n|) - \int_{I_n} W_3(|x(\sigma_n, \varphi_n)(s)|)\mathrm{d}s \\ &\leqslant W_2(\delta_1) - W_3\left(\frac{\varepsilon'}{4K}\right) m(I_n), \end{aligned}$$

其中, $m(I_n)$ 表示集合 I_n 的 Lebesgue 测度, 由 (1.2.13) 知

$$m(I_n) \leqslant \frac{W_2(\delta_1)}{W_3\left(\dfrac{\varepsilon'}{4K}\right)}. \tag{1.2.14}$$

设

$$J_n = \left\{ s \in [\sigma_n, \sigma_n + n] \,\middle|\, |x(\sigma_n, \varphi_n)(s)| < \frac{\varepsilon'}{4K} \right\}.$$

由 (1.2.14) 得

$$m(J_n) \geqslant n - \frac{W_2(\delta_1)}{W_3\left(\dfrac{\varepsilon'}{4K}\right)} := r_n(\varepsilon). \tag{1.2.15}$$

若存在点对 $t_i, t_i^* \in [\sigma_n, \sigma_n + n]$ 满足

$$t_i < t_i^*, \quad |x(\sigma_n, \varphi_n)(t_i)| = \frac{\varepsilon'}{4K}, \quad |x(\sigma_n, \varphi_n)(t_i^*)| = \frac{\varepsilon'}{2K},$$

$$|x(\sigma_n, \varphi_n)(s)| \in \left(\frac{\varepsilon}{4K}, \frac{\varepsilon'}{2K}\right), \quad s \in (t_i, t_i^*), i = 1, 2, \cdots, k,$$

由条件 (2) 有

$$
\begin{aligned}
&V(\sigma_n+n, x_{\sigma_n+n}(\sigma_n,\varphi_n)) \\
\leqslant\, & W_2(\delta_1)-\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+n} W'_{(1.2.1)}(|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|)\mathrm{d}s \\
\leqslant\, & W_2(\delta_1)-\sum_{i=1}^{k}[W(|x(\sigma_n,\varphi_n)(t_i)|)-W(|x(\sigma_n,\varphi_n)(t_i^*)|)] \\
=\, & W_2(\delta_1)-k\left[W\left(\frac{\varepsilon'}{2K}\right)-W\left(\frac{\varepsilon'}{4K}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.2.16}
$$

由 (1.2.16) 及条件 (1) 得到

$$
k\leqslant \frac{W_2(\delta_1)}{W\left(\dfrac{\varepsilon'}{2K}\right)-W\left(\dfrac{\varepsilon'}{4K}\right)}:=\lambda_n(\varepsilon). \tag{1.2.17}
$$

同理可证, 若点对 $\tau_j,\tau_j^*\in[\sigma_n,\sigma_n+n]$ 满足

$$
\tau_j<\tau_j^*,\quad |x(\sigma_n,\varphi_n)(\tau_j)|=\frac{\varepsilon'}{2K},\quad |x(\sigma_n,\varphi_n)(\tau_j^*)|=\frac{\varepsilon'}{4K},
$$

$$
|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|\in\left(\frac{\varepsilon'}{4K},\frac{\varepsilon'}{2K}\right),\quad s\in(\tau_j,\tau_j^*), j=1,2,\cdots,k,
$$

则也有 $k\leqslant\lambda_n(\varepsilon)$. 不妨设点对序列 $\{t_i,t_i^*\}$ 和 $\{\tau_j,\tau_j^*\}$ 满足

$$
\sigma_n\leqslant t_1<t_1^*\leqslant\tau_1<\tau_1^*\leqslant t_2<t_2^*\leqslant\cdots\leqslant t_k<t_k^*\leqslant\tau_k<\tau_k^*\leqslant\sigma_n+n,
$$

$$
\begin{cases}
|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|\geqslant \dfrac{\varepsilon'}{4K}, & s\in[t_i^*,\tau_i^*],\ i=1,2,\cdots,k,\\[2mm]
|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|< \dfrac{\varepsilon'}{2K}, & s\in[\tau_j^*,t_{j+1}],\ j=0,1,2,\cdots,k,
\end{cases}
\tag{1.2.18}
$$

这里记 $\sigma_n=\tau_0^*$, $\sigma_n+n=t_{k+1}$. 点对集合 $\{t_i,t_i^*\}$ 和 $\{\tau_j,\tau_j^*\}$ 可能还有其他排列情况. 例如, $\sigma_n\leqslant\tau_1<\tau_1^*\leqslant t_2<t_2^*\leqslant\cdots\leqslant\tau_{k-1}<\tau_{k-1}^*\leqslant t_k<\sigma_n+n$ 等, 但证明方法是类似的, 故只证上面那种情况.

记集合 $J_n^i=[\tau_i^*,t_{i+1}]$, $i=0,1,2,\cdots,k$. 由 (1.2.18) 有 $J_n\subset\bigcup\limits_{i=0}^{k}J_n^i$, 从而有

$$
\sum_{i=0}^{k}m(J_n^i)\geqslant m(J_n)>r_n(\varepsilon). \tag{1.2.19}
$$

因为 $k\leqslant\lambda_n(\varepsilon)$, 由 (1.2.19) 及抽屉原理知至少存在一个 $\xi\in\{0,1,2,\cdots,k\}$, 使得

$$
m(J_n^{\xi})\geqslant\frac{r_n(\varepsilon)}{\lambda_n(\varepsilon)+1}. \tag{1.2.20}
$$

由 (1.2.15) 和 (1.2.17) 易知, 当 n 充分大时, 可使

$$\frac{r_n(\varepsilon)}{\lambda_n(\varepsilon)+1} > S. \tag{1.2.21}$$

不妨设存在 $N>0$, 当 $n \geqslant N$ 时, (1.2.21) 成立, 从而由 (1.2.13) 和 (1.2.18) 有

$$\begin{aligned}|x_{t_{\xi+1}}(\tau_\xi^*, x_{\tau_\xi^*}(\sigma_n,\varphi_n))| &\leqslant K|x(\sigma_n,\varphi_n)|^{[\tau_\xi^*, t_{\xi+1}]} + M(t_{\xi+1}-\tau_\xi^*)|x_{\tau_\xi^*}(\sigma_n,\varphi_n)| \\ &\leqslant K\frac{\varepsilon'}{2K} + M(S)(M\delta_1+K) < \varepsilon'.\end{aligned}$$

再由 (1.2.12) 得到

$$|x(t_{\xi+1}, x_{t_{\xi+1}}(\sigma_n,\varphi_n))(t)| = |x(\sigma_n,\varphi_n)(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \geqslant t_{\xi+1}, n \geqslant N.$$

由此及 (1.2.11) 推知

$$T^*\left(\frac{\varepsilon}{2},\varphi_n,\sigma_n\right) \leqslant t_{\xi+1}-\sigma_n \leqslant n < T^*(\varepsilon,\varphi_n,\sigma_n), \quad n \geqslant N.$$

但由 $T^*(\varepsilon,\varphi_n,\sigma_n)$ 的定义, 这是不可能的, 此矛盾证明了 (1.2.10) 成立. 设

$$T^*(\varepsilon) = \sup_{(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times S_{\delta_1}}\{T^*(\varepsilon,\varphi,\sigma)\},$$

则对任意 $\sigma \in \mathbb{R}^+$ 和任意 $\varphi \in S_{\delta_1}$, 只要 $t \geqslant \sigma + T^*(\varepsilon)$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)| < \varepsilon$, 这证明了 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的. ■

定理 1.2.3　*设存在 Lyapunov 泛函 $V(t,\varphi):\mathbb{R}^+\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^+$ 满足*

(i) $W_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant W_2(|\varphi|)$;

(ii) $V'_{(1.2.1)}(t,\varphi) \leqslant -W_3(|\varphi(0)|)$;

(iii) 当 φ 有界时 $f(t,\varphi)$ 有界,

其中, W_1, W_2, W_3 是楔函数, 则方程 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

证明　由条件 (iii), 可设存在单调递增函数 $L:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 使得当 $|\varphi| \leqslant \alpha$ 时有 $|f(t,\varphi)| \leqslant L(\alpha)$. 对任意的 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathscr{B}$, 有

$$|x_t(\sigma,\varphi)| \leqslant KW_1^{-1}(W_2(|\varphi|)) + M|\varphi|, \tag{1.2.22}$$

其中, $M = \sup\limits_{t\geqslant\sigma} M(t-\sigma)$. 与定理 1.2.2 证明类似, 容易证明 (1.2.1) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的且

$$\liminf_{t\to+\infty}|x(\sigma,\varphi)(t)| = 0. \tag{1.2.23}$$

如果 $\limsup\limits_{t\to+\infty}|x(\sigma,\varphi)(t)| = a_2 > 0$. 由 (1.2.23) 知存在序列

$$\sigma < t_1 < t_1' < t_2 < t_2' < \cdots < t_n < t_n' < \cdots, \quad t_n \to +\infty,\ n\to+\infty,$$

使得

$$|x(\sigma,\varphi)(t_i)| = \frac{1}{4}a_2, \quad |x(\sigma,\varphi)(t_i')| = \frac{1}{2}a_2, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

对任意固定的 n 有

$$\begin{aligned} V(t_n', x_{t_n'}(\sigma,\varphi)) &\leqslant V(t_1, x_{t_1}(\sigma,\varphi)) - \int_{t_1}^{t_n'} W_3(|x(\sigma,\varphi)(s)|)\mathrm{d}s \\ &\leqslant W_2(|x_{t_1}(\sigma,\varphi)|) - \int_{t_1}^{t_n} W_3(|x(\sigma,\varphi)(s)|)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

由 (1.2.22) 有

$$|x'(\sigma,\varphi)(t)| = |f(t, x_t(\sigma,\varphi))| \leqslant L(KW_1^{-1}(W_2(|\varphi|)) + M(|\varphi|)) := N.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a_2 &\leqslant ||x(\sigma,\varphi)(t_i')| - |x(\sigma,\varphi)(t_i)|| \\ &\leqslant |x(\sigma,\varphi)(t_i') - x(\sigma,\varphi)(t_i)| \\ &\leqslant |x'(\sigma,\varphi)(\xi)||t_i' - t_i| \\ &\leqslant |f(\xi, x_\xi(\sigma,\varphi))||t_i' - t_i| \leqslant N|t_i' - t_i|, \end{aligned}$$

因此

$$|t_i' - t_i| \geqslant \frac{a_2}{4N}. \tag{1.2.25}$$

由 (1.2.24) 和 (1.2.25) 有

$$\begin{aligned} V(t_n', x_{t_n'}(\sigma,\varphi)) &\leqslant W_2(|x_{t_1}(\sigma,\varphi)|) - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_i'} W_3(|x(\sigma,\varphi)(s)|)\mathrm{d}s \\ &\leqslant W_2(|x_{t_1}(\sigma,\varphi)|) - na_2W_3\left(\frac{1}{4}a_2\right)(4N)^{-1}, \end{aligned}$$

由上式推得

$$V(t_n', x_{t_n'}(\sigma,\varphi)) \to -\infty, \quad n \to +\infty.$$

此矛盾表明

$$\limsup_{t\to+\infty} |x(\sigma,\varphi)(t)| = 0. \tag{1.2.26}$$

由 (1.2.23) 和 (1.2.26) 得到

$$\lim_{t\to+\infty} |x(\sigma,\varphi)(t)| = 0. \tag{1.2.27}$$

由零解的一致稳定性和 (1.2.22), 对任意 $\sigma \in \mathbb{R}^+$, 可以选取 $\delta_1 > 0$, 使得只要 $|\varphi| \leqslant \delta_1$ 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant 1$, $t \geqslant \sigma$, 从而有

$$|x_t(\sigma,\varphi)| \leqslant K + M\delta_1, \quad t \geqslant \sigma, \ |\varphi| \leqslant \delta_1. \tag{1.2.28}$$

定义 $S(\delta_1)=\{\varphi\in\mathscr{B}|\ |\varphi|\leqslant\delta_1\}$. 由 (1.2.27), 对任意 $\varphi\in S(\delta_1)$, $\sigma\in\mathbb{R}^+$ 及任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T(\varepsilon,\varphi,\sigma)>0$, 使得只要 $t\geqslant\sigma+T(\varepsilon,\varphi,\sigma)$ 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant\varepsilon$. 这样的 T 当然不是唯一的. 令 $T^*(\varepsilon,\varphi,\sigma)=\inf\{T(\varepsilon,\varphi,\sigma)\}$. 下面证明

$$\sup_{(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times S(\delta_1)}\{T^*(\varepsilon,\varphi,\sigma)\}<+\infty. \tag{1.2.29}$$

如果 (1.2.29) 不成立, 则必然存在序列 $(\sigma_n,\varphi_n)\in\mathbb{R}^+\times S(\delta_1)$, $n=1,2,\cdots$, 使得 $T^*(\varepsilon,\varphi_n,\sigma_n)>n$. 因为 (1.2.1) 的零解是 $\mathbb{R}^n$ 一致稳定的, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\varepsilon_1>0$, 使得对任意 $\sigma\in\mathbb{R}^+$, 只要 $|\varphi|\leqslant\varepsilon_1$, $t\geqslant\sigma$ 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{1.2.30}$$

因为 $\mathscr{B}$ 是具有衰减记忆的相空间, 所以可以选取 $S>0$, 使得

$$M(r)\leqslant M(S)\leqslant\frac{1}{2}(M\delta_1+K)^{-1}\varepsilon_1,\quad r\geqslant S.$$

定义

$$I_n=\left\{s\in[\sigma_n,\sigma_n+n]\,\middle|\,|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{4K}\right\}.$$

由 (ii) 有

$$\begin{aligned}V(\sigma_n+n,x_{\sigma_n+n}(\sigma_n,\varphi_n))&\leqslant V(\sigma_n,\varphi_n)-\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+n}W_3(|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|)\mathrm{d}s\\&\leqslant W_2(|\varphi_n|)-\int_{I_n}W_3(|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|)\mathrm{d}s\\&\leqslant W_2(\delta_1)-W_3\left(\frac{\varepsilon_1}{4K}\right)m(I_n),\end{aligned} \tag{1.2.31}$$

其中, $m(I_n)$ 表示集合 I_n 的 Lebesgue 测度. 由 (i) 和 (1.2.31) 得到

$$m(I_n)\leqslant\frac{W_2(\delta_1)}{W_3\left(\dfrac{\varepsilon_1}{4K}\right)}. \tag{1.2.32}$$

令

$$J_n=\left\{s\in[\sigma_n,\sigma_n+n]\,\middle|\,|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|<\frac{\varepsilon_1}{4K}\right\}.$$

由 (1.2.32) 有

$$m(J_n)\geqslant n-\frac{W_2(\delta_1)}{W_3\left(\dfrac{\varepsilon_1}{4K}\right)}:=\gamma_n(\varepsilon). \tag{1.2.33}$$

如果存在点对序列 t_i, $t_i^*\in[\sigma_n,\sigma_n+n]$, $t_i<t_i^*$, 使得

$$|x(\sigma_n,\varphi_n)(t_i)|=\frac{\varepsilon_1}{4K},\quad |x(\sigma_n,\varphi_n)(t_i^*)|=\frac{\varepsilon_1}{2K}$$

和

$$|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)| \in \left(\frac{\varepsilon_1}{4K},\frac{\varepsilon_1}{2K}\right),\quad s\in(t_i,t_i^*),\ i=1,2,\cdots,k.$$

由 (1.2.28) 得到

$$\begin{aligned}L(K+M\delta_1)&\geqslant\frac{|x(\sigma,\varphi)(t_i^*)-x(\sigma,\varphi)(t_i)|}{|t_i^*-t_i|}\\&\geqslant\frac{|x(\sigma_n,\varphi_n)(t_i^*)-x(\sigma_n,\varphi_n)(t_i)|}{|t_i^*-t_i|}\geqslant\frac{\varepsilon_1}{4K|t_i^*-t_i|}.\end{aligned}$$

由此推得

$$|t_i^*-t_i|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{4KL(K+M\delta_1)},\quad i=1,2,\cdots,k.$$

然后由 (ii) 得到

$$\begin{aligned}V(\sigma_n+n,x_{\sigma_n+n}(\sigma_n,\varphi_n))&\leqslant W_2(\delta_1)-\int_{\sigma_n}^{\sigma_n+n}W_3(|x(\sigma_n,\varphi_n)(s)|)\mathrm{d}s\\&\leqslant W_2(\delta_1)-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i}^{t_i^*}W_3\left(\frac{\varepsilon_1}{4K}\right)\mathrm{d}s\\&\leqslant W_2(\delta_1)-\frac{k\varepsilon_1W_3\left(\frac{\varepsilon_1}{4K}\right)}{4KL(K+M\delta_1)}.\end{aligned}\tag{1.2.34}$$

由 (i) 推得

$$k\leqslant\frac{4KW_2(\delta_1)L(K+M\delta_1)}{\varepsilon_1W_3\left(\frac{\varepsilon_1}{4K}\right)}:=\lambda_n(\varepsilon).\tag{1.2.35}$$

定理证明的后半部分与定理 1.2.2 完全相同, 此处从略. ∎

定理 1.2.3 可以看成是 Krasovskii 的经典结果定理 1.2.1 在具有无限时滞的泛函微分方程中的一个推广.

为了研究具有无限时滞的泛函微分方程的渐近稳定性, Burton[16] 和黄启昌[88] 引入了一致健忘 V 泛函的概念, 并大大推进了这个方向的研究进展. 本节的工作表明, 相空间的衰减记忆性质可以起到与 V 泛函的一致健忘性相类似的作用, 两者有异曲同工之妙, 而且前者使用起来似乎更为方便. 但两者作用是否完全等价, 尚待进一步研究.

对于具体的方程, 可以选取适当的相空间去解决问题. 我们将在后面的章节中应用本节的结果研究 Volterra 方程的稳定性和周期解问题.

本节内容主要取自文献 [150].

1.3 容许相空间与泛函微分方程解的非常稳定性

设 Ω 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, $\mathscr{B}$ 是容许的. 考虑具有无限时滞的 RFDE

$$x'(t)=f(t,x_t),\tag{1.3.1}$$

其中, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是给定的连续泛函且 $f(t,\varphi)$ 对 φ 满足局部 Lipschitz 条件 (以下简称局部李氏条件).

引理 1.3.1 若相空间 $\mathscr{B}$ 为容许的,$f(t,\varphi)$ 连续且对 φ 满足局部李氏条件, 则对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathscr{B}$, 方程 (1.3.1) 满足初始条件 $x_\sigma=\varphi$ 的解 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 存在且唯一, 满足通常的解对初值的连续相依性定理及延展定理.

证明参见文献 [71, 102, 133].

定义 1.3.1 若对方程 (1.3.1) 的任意两个初值解 $x(\sigma,\varphi)(t),x(\sigma,\psi)(t)$, $t\geqslant\sigma$, $\varphi,\psi\in\mathscr{B}$, 存在与 σ 有关的连续函数 $\beta:[\sigma,\infty)\to\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\beta(t)=0$, 使得

$$|x(\sigma,\varphi)(t)-x(\sigma,\psi)(t)|\leqslant\beta(t)|\varphi-\psi|,\quad t\geqslant\sigma,$$

则称方程 (1.3.1) 是强非常稳定的.

定理 1.3.1 如果存在 Lyapunov 泛函 $V:\mathbb{R}^+\times\mathscr{B}\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^+$ 满足

(1) 存在 $a,b,c>0$, 使得

$$a|\varphi(0)-\psi(0)|\leqslant V(t,\varphi,\psi)\leqslant b|\varphi(0)-\psi(0)|+c|\varphi-\psi|;$$

(2) 存在连续函数 $\alpha(t):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\alpha(t)\mathrm{d}t=+\infty$, 使得

$$V'_{(1.3.2)}(t,x_t,y_t)\leqslant-\alpha(t)V(t,x_t,y_t),$$

其中, (1.3.2) 是 (1.3.1) 的伴随系统,

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x_t),\\ y'(t)=f(t,y_t),\end{cases}\tag{1.3.2}$$

则系统 (1.3.1) 是强非常稳定的.

证明 设 $\sigma\in\mathbb{R}^+,\varphi,\psi\in\mathscr{B}$, $x(\sigma,\varphi)(t)$ 和 $x(\sigma,\psi)(t)$ 分别是方程 (1.3.1) 满足 $x_\sigma=\varphi,x_\sigma=\psi$ 的解. 于是

$$\begin{aligned}a|x(\sigma,\varphi)(t)-x(\sigma,\psi)(t)|&\leqslant V(t,x_t(\sigma,\varphi),x_t(\sigma,\psi))\\&\leqslant V(\sigma,\varphi,\psi)\exp\left\{\int_\sigma^t-\alpha(s)\mathrm{d}s\right\}\\&\leqslant(bK_1+c)|\varphi-\psi|\exp\left\{\int_\sigma^t-\alpha(s)\mathrm{d}s\right\},\quad t\geqslant\sigma,\end{aligned}$$

至此已经证明系统 (1.3.1) 是强非常稳定的. ■

对于具有无限时滞的线性 RFDE, 可以得到更为深刻、更为完整的结果.

考虑线性方程

$$x'(t) = A(t, x_t) + g(t), \tag{1.3.3}$$

其中, $A(t,\varphi):\mathbb{R}\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^n$ 连续且关于 φ 是线性的, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 连续. 方程 (1.3.3) 所对应的齐次方程为

$$x'(t) = A(t, x_t). \tag{1.3.4}$$

定义 1.3.2 *如果存在正常数 λ 和 μ, 使得对任意 $\sigma\geqslant 0$, $\varphi\in\mathscr{B}$, 有*

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant \mu e^{-\lambda(t-\sigma)}|\varphi| \quad (|x_t(\sigma,\varphi)| \leqslant \mu e^{-\lambda(t-\sigma)}|\varphi|), \quad t\geqslant\sigma.$$

则称 (1.3.4) 的零解是 $\mathbb{R}^n$ 全局指数稳定的 ($\mathscr{B}$ 全局指数稳定的).

引理 1.3.2 *设 $\mathscr{B}$ 是容许的, 则 (1.3.4) 的零解是 $\mathscr{B}$ 一致渐近稳定的当且仅当它是 $\mathscr{B}$ 全局指数稳定的.*

证明 充分性由定义 1.3.2 可直接推得, 必要性由文献 [133] 的定理 3.2 保证. ■

引理 1.3.3 *设 $\mathscr{B}$ 是容许的, 若 (1.3.4) 的零解是 $\mathscr{B}$ 全局指数稳定的, 则方程 (1.3.3) 是强非常稳定的.*

证明 设 $x(\sigma,\varphi)(t), x(\sigma,\psi)(t)$ 分别是 (1.3.3) 的两个解, $\sigma\geqslant 0,\varphi,\psi\in\mathscr{B}$, 则 $x(\sigma,\varphi)(t) - x(\sigma,\psi)(t)$ 是 (1.3.4) 的满足 $x_\sigma=\varphi-\psi$ 的解, 故有

$$|x_t(\sigma,\varphi) - x_t(\sigma,\psi)| \leqslant \mu e^{-\lambda(t-\sigma)}|\varphi-\psi|, \quad t\geqslant\sigma.$$

由容许相空间的定义 (定义 1.1.1) 中的条件 (B_4), 有

$$|x(\sigma,\varphi)(t) - x(\sigma,\psi)(t)| \leqslant \mu K_1 e^{-\lambda(t-\sigma)}|\varphi-\psi|, \quad t\geqslant\sigma.$$

引理证毕. ■

若 $\mathscr{B}$ 是容许的, 则由引理 1.3.2 和引理 1.3.3 可以推得: 若 (1.3.4) 的零解是 $\mathscr{B}$ 一致渐近稳定的, 则 (1.3.3) 是强非常稳定的.

如果系统 (1.3.1) 还是周期的, 则有如下结论:

引理 1.3.4 *若 $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$, $f(t,0)=0$, $t\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B}$ 是容许的, 则 (1.3.1) 的零解的 $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 渐近稳定性与 $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 一致渐近稳定性是等价的.*

证明可参见文献 [102] 的引理 1.1. 那里的稳定性定义与本文稍有不同且是对有限时滞的方程而言的, 但证明主要基于系统的周期性, 因而可以几乎逐句照搬到此处, 故这里不再赘述. 所以对周期方程而言, 由引理 1.3.2~ 引理 1.3.4 立即可得: 若 (1.3.4) 的零解是 $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 渐近稳定的, 则 (1.3.3) 是强非常稳定的. 但在具体应用

中, 使用 Lyapunov 第二方法, 往往只能得到系统的 $\mathbb{R}^n$ 渐近稳定性, 而不是 $\mathscr{B}$ 渐近稳定性. 因此, 下面的引理 1.3.5 是很有用的.

引理 1.3.5　设 $\mathscr{B}$ 是具有衰减记忆的容许相空间, 则 (1.3.1) 的 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定性与 $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 渐近稳定性是等价的.

证明请参见文献 [96] 中的定理 5.

定理 1.3.2　设 $\mathscr{B}$ 是具有衰减记忆的容许相空间, 若 $A(t+\omega,\varphi)=A(t,\varphi)$, $g(t+\omega)=g(t)$, 则线性方程 (1.3.3) 为强非常稳定的当且仅当它所对应的齐次线性方程 (1.3.4) 的零解为 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的.

证明　若 (1.3.4) 的零解为 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的, 则由引理 1.3.2~ 引理 1.3.5 可知 (1.3.3) 为强非常稳定的.

若 (1.3.3) 为强非常稳定的, 设 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 为 (1.3.4) 的满足 $x_\sigma=\varphi$ 的解, 而 $y(\sigma,\varphi)(t)$ 为 (1.3.3) 的满足 $y_\sigma=\varphi$ 的解, 则显然有

$$y(\sigma,\varphi)(t)-x(\sigma,\varphi)(t)=y(\sigma,0)(t),\quad t\geqslant\sigma.$$

由强稳定性的定义有

$$\begin{aligned}|x(\sigma,\varphi)(t)|&=|y(\sigma,\varphi)(t)-(y(\sigma,\varphi)(t)-x(\sigma,\varphi)(t))|\\&=|y(\sigma,\varphi)(t)-y(\sigma,0)(t)|\\&\leqslant\beta(t)|\varphi|,\quad t\geqslant\sigma,\ \varphi\in B,\end{aligned}\tag{1.3.5}$$

其中, $\beta(t)$ 与 σ 有关且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\beta(t)=0$, 由 (1.3.5) 即推得 (1.3.4) 的零解为 $\mathscr{B}$-R_n 渐近稳定的. ■

本节内容主要取自文献 [153].

1.4　具有无限时滞的滞后型泛函微分方程的周期解的存在性

微分方程理论研究中的一个基本问题是方程解的性态, 其中, 一个非常重要的方面是确定系统是否存在周期解、什么条件下存在周期解. 周期解理论是泛函微分方程理论研究中的一个重要课题, 具有重要的理论意义和应用价值, 富有一定的挑战性, 一直受到学术界的高度重视, 许多学者都进行了深入而广泛的研究, 并且取得了大量的研究成果. 研究泛函微分方程周期解的存在性有各种各样的方法, 如不动点定理方法、拓扑度方法、常微分方程产生法、映象特征函数法、Lyapunov 第二方法等.

本节采用一种新的、简洁的方法来研究泛函微分方程 (1.3.1) 的周期解的存在性问题. 此方法的特点是所得出的判据易于验证, 在某些情况下还可以较精确地估计出周期解个数的下界. 本书的后面章节将陆续介绍一些其他方法.

定义 1.4.1 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸紧集, 把 S 的边界记为 ∂S. 显然 ∂S 把 $\mathbb{R}^n$ 分为两个部分: $S-\partial S$ 称为内部, 记为 S^1; $\mathbb{R}^n-S$ 称为外部, 记为 S^2. 把 $\mathbb{R}^+\times\partial S$ 看成是 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$ 中的广义柱面, 则显然 $\mathbb{R}^+\times\partial S$ 把 $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$ 也分为两部分: $\mathbb{R}^+\times S^1$ 称为内部, $\mathbb{R}^+\times S^2$ 称为外部.

定义 1.4.2 设 $x=x(\sigma,\varphi)(t),t\geqslant\sigma$ 为方程 (1.3.1) 的满足初始条件 $x_\sigma=\varphi$ 的解. 如果对任意 $(\tau,\tilde{x})\in\mathbb{R}^+\times\partial S$(其中, S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸紧集), 只要 $\varphi\in\mathscr{B}$, $\varphi(\theta)\in S$, $\theta\in\mathbb{R}^-$, $\varphi(0)=\tilde{x}$, 就有 $x(\tau,\varphi)(t),t\geqslant\tau$ 存在, 且存在 τ 的某一右邻域 $(\tau,\tau+\varepsilon)$, 使得只要 $t\in(\tau,\tau+\varepsilon)$, 就有 $x(\tau,\varphi)(t)\in S$, 则称方程 (1.3.1) 在 S 上是内向的.

定理 1.4.1 设

(1) 方程 (1.3.1) 的初值问题满足存在性、唯一性、延展性和解对初值的连续依赖性. 此外, 如果 S_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则集合

$$\{\varphi\in\mathscr{B}|\varphi(\theta)\in S_0,\theta\in\mathbb{R}^-,|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L(S_0)|\theta_1-\theta_2|,\ \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^-\}$$

是 $\mathscr{B}$ 中的紧集, 这里 $L(S_0)$ 是某个与 S_0 有关的常数;

(2) 对任意 $\varphi\in\mathscr{B}$ 及任意 $t\in\mathbb{R}^+$, 存在 $\omega>0$, 使得

$$f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi);$$

(3) 对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意紧集 D, 存在常数 $L(D)$, 使得只要 $\varphi\in\mathscr{B},\varphi(\theta)\in D,\theta\in\mathbb{R}^-$, 就有

$$|f(t,\varphi)|\leqslant L(D),\quad t\in\mathbb{R}^+;$$

(4) 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的凸紧集 S, 使得方程 (1.3.1) 在 S 上是内向的,

则方程 (1.3.1) 存在 ω 周期解 $x(t)$ 且 $x(t)\in S,t\in\mathbb{R}$.

证明 由条件 (1) 知集合

$$S'=\{\varphi\in\mathscr{B}|\varphi(\theta)\in S,\theta\in\mathbb{R}^-,|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L(S)|\theta_1-\theta_2|,\ \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^-\}$$

是 $\mathscr{B}$ 中的紧凸集.

设 $\sigma\geqslant 0$, $\varphi\in S$. 记 (1.3.1) 的满足初始条件 $x_\sigma=\varphi$ 的解为 $x(\sigma,\varphi)(t)$. 因为 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 存在且唯一, (1.3.1) 在 S 上是内向的, 由延展定理知 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 在 $t\geqslant\sigma$ 上存在. 定义映射 $T:S'\to\mathscr{B}$ 如下:

$$T\varphi=x_{\sigma+\omega}(\sigma,\varphi),\quad \varphi\in S'.$$

因为 S 是内向的, 易知 $x(\sigma,\varphi)(t)\in S$, $t\geqslant\sigma$, 故 $x_{\sigma+\omega}(\sigma,\varphi)\in S'$(此处证明参考定理 2.5.1), 从而 T 是 S' 到自身的映射. 由解对初值的连续相依性知, 映射 T 是连续的. 易证 $\mathscr{B}$ 是局部凸的线性拓扑空间, 由 Schauder-Tychonov 不动点定理知 T 在 S' 中存在不动点 φ^*, 即

$$x_{\sigma+\omega}(\sigma,\varphi^*)=x_\sigma(\sigma,\varphi^*)=\varphi^*.$$

下面证明 $x(\sigma,\varphi^*)(t)$ 是 (2.4.1) 的 ω 周期解.

由条件 (2) 可知 $x(\sigma,\varphi^*)(t+\omega)$ 也是 (1.3.1) 的一个解. 由解的唯一性以及

$$x(\sigma,\varphi^*)(t+\omega)=x(\sigma,x_{\sigma+\omega}(\sigma,\varphi^*))(t)=x(\sigma,\varphi^*)(t)$$

知 $x(\sigma,\varphi^*)(t)$ 是 (1.3.1) 的 ω 周期解. 证毕. ■

下面证明定理 1.4.1 的一个特例, 其特点是便于应用.

记 $f(t,\varphi)$ 的第 i 个分量为 $f_i(t,\varphi)$, $i=1,2,\cdots,n$. 设 $\varphi\in\mathscr{B}$. 记 φ 的第 i 个分量为 φ_i, $i=1,2,\cdots,n$.

定理 1.4.2　*假设存在 $a_i<b_i, i=1,2,\cdots,n$, 使得对任意 $\varphi,\psi\in\mathscr{B}$ 及 $t_1,t_2\in\mathbb{R}^+$, 如果*

$$a_i\leqslant\varphi_i(\theta)\leqslant b_i,\ a_i\leqslant\psi_i(\theta)\leqslant b_i,\quad \theta\in\mathbb{R}^-,$$

$$\varphi_i(0)=a_i,\quad \psi_i(0)=b_i,$$

则有

$$f_i(t_1,\varphi)>0\ \text{ 或 }\ f_i(t_2,\psi)<0,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

此外定理 1.4.1 的条件 (1) ~ (3) 满足, 则方程 (1.3.1) 存在 ω 周期解 $x=x(t)$ 且有

$$x(t)\in[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n].$$

证明　取集合

$$S_0=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n].$$

易知 S_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸紧集.

任取 $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^+\times\partial S_0$, 任取 $\varphi\in\mathscr{B},\varphi(\theta)\in S_0$, $\varphi(0)=x_0$, 则由定理条件知在 (t_0,x_0) 处, 向量 $f(t_0,\varphi)$ 的方向由边界 $\mathbb{R}^+\times\partial S_0$ 指向内部 $\mathbb{R}^+\times S_0^1$, 从而存在 t_0 的某一右邻域 (t_0,t_0+s), 使得 $x(t_0,\varphi)(t)\in S_0$, $t\in(t_0,t_0+s)$, 因而方程 (1.3.1) 在 S_0 上是内向的. 由定理 1.4.1, 本定理得证. ■

本节内容主要取自文献 [147].

1.5　泛函微分方程的全局稳定周期解

考虑具有无限时滞的泛函微分方程 (1.3.1), 假设 $f(t,\varphi):\mathbb{R}\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^n$ 是 ω 周期的, 即存在 $\omega>0$, 使得

$$f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi),\quad t\in\mathbb{R},\varphi\in\mathscr{B}.$$

定义 1.5.1 若 $y(t), t\in\mathbb{R}$ 是 (1.3.1) 的周期解, 如果

(i) 对任意给定 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon,\sigma)>0$, 只要 $|\varphi-y_\sigma|<\delta$, 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)-y(t)|<\varepsilon,\quad t\geqslant\sigma;$$

(ii) 对任意给定 $\varepsilon>0$ 和 $N>0$, 存在 $T(\varepsilon,N)>0$, 只要 $|\varphi-y_\sigma|\leqslant N$, $t\geqslant\sigma+T$, 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)-y(t)|<\varepsilon,$$

则称 $y(t)$ 为 (1.3.1) 的全局稳定 ω 周期解.

定理 1.5.1 设 $\mathscr{B}$ 是具有衰减记忆的容许相空间且系统 (1.3.1) 是强非常稳定的, 则系统 (1.3.1) 存在唯一全局稳定的 ω 周期解.

证明 任给 $\sigma\in\mathbb{R}^+$, $\varphi,\psi\in\mathscr{B}$, 由容许相空间的定义有

$$\begin{aligned}|x_t(\sigma,\varphi)-x_t(\sigma,\psi)|&\leqslant K\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(\sigma,\varphi)(s)-x(\sigma,\psi)(s)|+M(t-\sigma)|\varphi-\psi|\\&\leqslant[K\beta(t)+M(t-\sigma)]|\varphi-\psi|,\quad t\geqslant\sigma.\end{aligned}$$

由强稳定性的定义及 (1.1.4) 知存在充分大的正整数 m, 使得

$$K\beta(\sigma+m\omega)+M(m\omega)<1. \tag{1.5.1}$$

定义映射 $P:\mathscr{B}\to\mathscr{B}$ 如下:

$$P\varphi=x_{\sigma+\omega}(\sigma,\varphi),\quad \varphi\in\mathscr{B}.$$

由解对初值的连续相依性知, 映射 P 是连续的. 此外, 有

$$\begin{aligned}|P^m\varphi-P^m\psi|&=|x_{\sigma+m\omega}(\sigma,\varphi)-x_{\sigma+m\omega}(\sigma,\psi)|\\&\leqslant[K\beta(\sigma+m\omega)+M(m\omega)]|\varphi-\psi|.\end{aligned}$$

由 (1.5.1) 知 P^m 是 $\mathscr{B}$ 中的压缩算子, 故 P 在 $\mathscr{B}$ 中有唯一不动点 φ^*. 由 P 的定义知 $x(\sigma,\varphi^*)(t)$ 即为 (1.3.1) 的唯一的 ω 周期解. 由系统 (1.3.1) 的强非常稳定性推得 $x(\sigma,\varphi^*)(t)$ 是全局稳定的周期解. 证毕. ∎

下面考虑线性方程 (1.3.3) 及其对应的齐次方程 (1.3.4), 假设 $A(t+\omega,\varphi)=A(t,\varphi)$, $g(t+\omega)=g(t)$.

定理 1.5.2 设 $\mathscr{B}$ 为具有衰减记忆的容许相空间, 则线性方程 (1.3.3) 具有唯一全局稳定周期解的充分必要条件为它所对应的线性齐次方程 (1.3.4) 的零解为 $\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的.

证明 若 (1.3.4) 的零解是 $\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的, 则由定理 1.3.2 知 (1.3.3) 是强非常稳定的. 再由定理 1.5.1, 方程 (1.3.3) 存在唯一全局稳定的 ω 周期解.

若 (1.3.3) 存在唯一全局稳定周期解, 设其为 $y(t), t\in\mathbb{R}$. 设 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{B}$, $x(\sigma,\varphi)(t)$, $t\geqslant\sigma$ 为 (1.3.4) 的满足 $x_\sigma=\varphi$ 的解, 则 $x(\sigma,\varphi)(t)+y(t)$, $t\geqslant\sigma$ 为

(1.3.3) 的满足 $x_\sigma = \varphi + y_\sigma$ 的解. 由全局稳定周期解的定义知对任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\sigma) > 0$, 只要 $|\varphi + y_\sigma - y_\sigma| = |\varphi| < \delta$ 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t) + y(t) - y(t)| = |x(\sigma,\varphi)(t)| < \varepsilon, \quad t \geqslant \sigma.$$

这说明 (1.3.4) 的零解为 $\mathbb{R}^n$ 稳定的, 又若 $|\varphi| = |\varphi + y_\sigma - y_\sigma| \leqslant N$, 则对给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $T(\varepsilon, N) > 0$, 使得

$$|x(\sigma,\varphi)(t) + y(t) - y(t)| = |x(\sigma,\varphi)(t)| < \varepsilon, \quad t \geqslant \sigma + T,$$

因而 (1.3.4) 的零解是 $\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的. ■

本节内容主要取自文献 [153].

1.6 Yoshizawa 型周期解定理

微分方程的解的有界性是微分方程理论研究中的一个非常重要的课题, 与周期解的存在性有着紧密的联系, 利用微分方程解的有界性可以建立周期解存在性的判别准则. 在解的有界性与周期解的存在性问题的讨论中, Yoshizawa 周期解定理和 Massera 周期解定理是两个非常重要的结果, 具有非常重要的理论意义和应用价值, 一方面是微分方程周期解理论研究中的一个重要源泉; 另一方面在实际数学模型周期解的存在性的研究中有着重要应用. 应用这两个定理, 还可以建立周期解存在性的其他判别准则.

近年来, 许多学者致力于推广这两个定理, 得到了许多深刻的结果. 本节主要介绍 Yoshizawa 型周期解定理研究方面的一些新进展. 在 2.5 节将介绍 Massera 型周期解定理的研究进展.

这个问题最早可以追溯到 1944 年, Levinson[100] 证明了: 如果二阶周期 (周期为 ω) 常微分方程存在一个最终有界解, 则存在 ω 周期解.

1950 年, Cartwright[25] 和 Massera[121] 分别独立证明了对于二维周期常微分方程系统, 如果系统的解是等度最终有界的, 则系统存在 ω 周期解.

1966 年, Yoshizawa[180] 利用 Browder 不动点定理[13] 证明了如果 n 维 ω 周期常微分方程系统的解是等度最终有界的, 则系统存在 ω 周期解.

考虑具有限时滞的滞后型周期泛函微分方程

$$\dot{x} = f(t, x_t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.6.1}$$

其中, $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r, 0]$. 设 C 表示映 $[-r, 0]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续函数所组成的空间, 定义 $|\varphi| = \sup\limits_{\theta\in[-r,0]} |\varphi(\theta)|, \varphi \in C$. 在方程 (1.6.1) 中, 假设 f 满足

(H_1) $f(t+\omega, \cdot) = f(t, \cdot)$;

(H_2) 对任意 $\alpha > 0$, 存在 $L(\alpha) > 0$, 使得当 $|\varphi| \leqslant \alpha$ 时有 $|f(t,\varphi)| \leqslant L(\alpha)$;

(H_3) $f: R\times C\to\mathbb{R}^n$ 连续且使得方程的解存在唯一, 并且连续依赖于初始条件.

1966 年, Yoshizawa[180] 对于具有有限时滞的滞后型周期泛函微分方程 (1.6.1) 建立了著名的周期解存在性定理, 将常微分方程周期解存在性和耗散性结果推广到了泛函微分方程. 证明了当时滞 r 小于或等于方程的周期 ω 时, 如果方程 (1.6.1) 的解一致有界且关于 b_0 一致最终有界, 则方程 (1.6.1) 至少存在一个周期为 ω 的周期解, 且此周期解以 b_0 为界. Yoshizawa 在证明中所使用的主要工具是 Browder 不动点定理, 证明中需要解算子的紧性条件 ($r\leqslant\omega$ 恰好保证了这一点). 实际上, Yoshizawa 周期解定理只讨论了 "小时滞" 情形 ($r\leqslant\omega$), 而且一致最终有界性也是一个较强的条件.

近年来, 许多学者致力于推广这一定理, 一些作者先后去掉了 $r\leqslant\omega$ 的小时滞限制[5, 72, 103], 其中, 李晓颖[103] 不仅去掉了 $r\leqslant\omega$ 的限制, 而且将定理条件减弱为等度有界和等度最终有界, 所使用的主要工具是 Horn 不动点定理[86], Horn 不动点定理不要求解算子是紧的, 从而取消了 $r\leqslant\omega$ 的限制.

1984 年, Burton[18] 证明了对于某些具有无限时滞的周期为 ω 积分微分方程系统, 如果初始函数是有界的, 则解的一致有界性和一致最终有界性蕴含了周期为 $m\omega$ 的周期解的存在性; 文献 [5] 进一步将文献 [18] 的结果改进为存在 ω 周期解.

1987 年, 王克和黄启昌在文献 [146], [164]~[166] 引入了 $|\cdot|_h$ 模, 建立了 $\mathscr{C}_h$ 空间理论, 并以 $\mathscr{C}_h$ 空间为相空间将 Yoshizawa 周期解定理推广到了具有无限时滞的滞后型周期泛函微分方程

$$\dot{x}=f(t,x_t), \tag{1.6.2}$$

其中, $x_t(\theta)=x(t+\theta),\theta\in(-\infty,0]$, f 满足 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$. 证明了如果方程 (1.6.2) 的解是一致有界且一致最终有界的, 则方程 (1.6.2) 存在周期为 ω 的周期解. 对 Volterra 型积分微分方程得到了相同的结果. 几乎同时, Burton 等[21] 引入了 $|\cdot|_g$ 模, 建立 $\mathscr{C}_g$ 空间 (详见 3.1 节), 在此基础上, 也将 Yoshizawa 周期解定理推广到了具有无限时滞的滞后型周期泛函微分方程, 但要求方程具有弱衰减记忆性质, 这些结果用通常的上确界范数是难以得到的. 研究表明, $\mathscr{C}_h$ 空间和 $\mathscr{C}_g$ 空间之间有着紧密的联系, 在很多问题上有异曲同工之妙 (参见文献 [76] 或本书第 3 章).

众所周知, 中立型泛函微分方程是比滞后型泛函微分方程更为广泛的方程类型. 一个自然的问题是, 上述结果是否可以推广到中立型周期泛函微分方程.

1988 年, 高国柱[64] 将 Yoshizawa 周期解定理推广到了具有有限时滞的中立型周期泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}Dx_t}{\mathrm{d}t}=f(t,x_t), \tag{1.6.3}$$

其中, $x_t(\theta)=x(t+\theta),\theta\in[-r,0]$, f 满足 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$, D 是稳定连续算子. 文献 [64]

证明了对于方程 (1.6.3), 解的一致有界性和一致最终有界性蕴含了 ω 周期解的存在性. 特别地, 当 $D\varphi=\varphi(0)$ 时, 方程 (1.6.3) 即是方程 (1.6.1).

1990 年, 石磊[139] 又将 Yoshizawa 周期解定理推广到了具有无限时滞的中立型周期泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}Dx_t}{\mathrm{d}t}=f(t,x_t), \tag{1.6.4}$$

其中, $x_t(\theta)=x(t+\theta),\theta\in(-\infty,0],f$ 满足 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$. 为了克服无穷时滞所引起的困难, 他引入了一类更为广泛的具有强衰减记忆 (定义参见文献 [146]) 的相空间, 它包含 $\mathscr{C}_h$ 空间作为特例, 同时也是文献 [172] 中所定义的相空间的特例; 为了克服方程左端微分项中含有 x_t 的困难, 又引入了稳定 D 算子的概念[73, 102, 190].

1992 年, 徐志庭和温立志在文献 [177] 中引入了一种更为广泛的 $|\cdot|_p$ 模和 L_p 空间. 在 L_p 空间中, 对方程 (1.6.4) 同样证明了: 如果方程 (1.6.4) 的解是一致有界且一致最终有界的, 则方程 (1.6.4) 存在周期为 ω 的周期解.

1994 年和 1995 年, Liu[111, 112] 证明了: 对于 Banach 空间中不具有时滞的发展方程, 解的有界性和最终有界性蕴含了周期解的存在性. 1998 年, Liu 在文献 [113] 中又将这一结果推广到了 Banach 空间中具有有限时滞的发展方程. 2000 年, 在文献 [114] 中又研究了 Banach 空间中具有无限时滞的发展方程的周期解的存在性, 部分推广了上述结果.

泛函微分方程周期问题的耗散性结果对泛函微分包含是否仍然成立呢? 这也是人们一直关心的问题. 1994 年, 李勇等[107] 将 Yoshizawa 周期解定理推广到了具有无限时滞的泛函微分包含 $x'\in f(t,x_t)$, 其中, f 为集值映射, 证明了如果右端泛函是凸集值上半连续的, 则解的一致有界性和一致最终有界性蕴含了周期解的存在性. 1995 年, 李勇等[106] 对常微分包含得到了相同的结果. 2003 年, 吕显瑞等[117] 在右端泛函为非凸集值上半连续映射的假设下, 对具有无限时滞的泛函微分包含得到了类似的结果.

这是 Yoshizawa 型周期解定理研究的一个方向, 即将 Yoshizawa 周期解定理推广到更为广泛的方程类型上去. Yoshizawa 型周期解定理研究的另外一个方向是削弱定理中的条件.

众所周知, 对于周期常微分方程系统, 在解关于初值问题唯一的条件下, 解的等度最终有界性蕴含了解的一致有界性和一致最终有界性, 但对于泛函微分方程却不是这样.

1980 年, Kato[97] 指出, 由泛函微分方程解的一致最终有界性不能推出解的一致有界性, 因此, 上述周期解定理中解的一致有界性条件能否去掉成为人们关注的问题, 这是一个有趣且极富挑战性的问题.

1990 年, Burton 和 Zhang[23] 以有界连续函数空间作为相空间, 对具有无限时

滞的滞后型周期泛函微分方程 (1.6.2) 作了初步尝试, 在方程具有衰减记忆的假设下, 成功地去掉了解的一致有界性条件, 即证明了: 如果方程 (1.6.2) 的解是一致最终有界的, 则 (1.6.2) 存在周期为 ω 的周期解.

1996 年, 马世旺、庾建设[118] 和张书年 [184] 几乎同时独立地对具有有限时滞的滞后型周期泛函微分方程解决了类似的问题, 去掉了解的一致有界性条件. 2000 年, 杨喜陶和杨晓爱[178] 进一步改进了文献 [118] 的结果.

1999 年, 范猛和王克[48] 对具有无限时滞的滞后型周期泛函微分方程 (1.6.2) 作了进一步研究, 以文献 [71] 建立的相空间为基础, 用不同于文献 [23] 的方法, 在具有衰减记忆的容许相空间 (如 $\mathscr{C}_h$ 空间) 中, 证明了对于具有无限时滞的滞后型周期泛函微分方程 (1.6.2), 解的一致最终有界性蕴含了周期解的存在性, 取消了文献 [23] 中 "方程具有衰减记忆" 的假设, 文献 [166] 证明了 $\mathscr{C}_h$ 空间是 Banach 空间且是容许相空间, 而且在特定条件下具有衰减记忆, 文献 [150] 指出, 有界连续函数空间 BC 不是容许相空间, 也不具有衰减记忆, 可见, 文献 [48] 的结果与文献 [23] 互不包含, 但与文献 [23] 相比, 文献 [48] 的证明更为简洁.

范猛和王克[47, 54] 分别对具有有限时滞的中立型周期泛函微分方程 (1.6.3) 和具有无限时滞的中立型周期泛函微分方程 (1.6.4) 考虑了类似的问题, 证明了解的等度最终有界性蕴含了周期解的存在性, 成功地去掉了解的一致有界性条件, 并将解的一致最终有界性减弱为等度最终有界性, 推广了已有的相关结果, 拓广了定理的应用范围.

本节介绍文献 [48], [146] 的主要工作.

考虑方程

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{1.6.5}$$

其中, $f(t,\varphi): \mathbb{R}\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^n$ 是连续的且关于 φ 满足局部 Lipschitz 条件. 又设 $f(t,\varphi)$ 是 ω 周期的, 即存在 $\omega>0$, 使得

$$f(t+\omega,\varphi) = f(t,\varphi), \quad t\in\mathbb{R},\ \varphi\in\mathscr{B}.$$

本节总设相空间 $\mathscr{B}$ 是容许的且具有衰减记忆.

定义 1.6.1 *设方程 (1.6.5) 的满足初始条件 $x_\sigma=\varphi$ 的解为 $x(\sigma,\varphi)(t)$, 若对任意的 $k>0$, 存在 $N(k)>0$, 使得只要 $|\varphi|<k$, $\sigma\in\mathbb{R}$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|<N(k)$, $t\geqslant\sigma$, 则称 (1.6.5) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的.*

定义 1.6.2 *设存在常数 $b>0$, 对任意的 $k>0$, 存在 $H(k)>0$, 使得只要 $|\varphi|<k$, $\sigma\in\mathbb{R}$, $t\geqslant\sigma+H$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|<b$, 则称 (1.6.5) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.*

引理 1.6.1 *若方程 (1.6.5) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的, 则若 $|\varphi|$ 有界, 则 $|f(t,x_t(\sigma,\varphi))|$ 也是有界的.*

证明　设 $|\varphi| < a$, L 为 f 的 Lipschitz 常数. 因为方程 (1.6.5) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的, 所以存在 $N(a) > 0$, 使得 $|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant N(a), t \geqslant \sigma$, 故

$$\begin{aligned}|f(t,x_t(\sigma,\varphi)) - f(t,0)| &\leqslant L|x_t(\sigma,\varphi)| \\ &\leqslant L(K \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |x(\sigma,\varphi)(s)| + M(t-\sigma)|\varphi|) \\ &\leqslant L(KN(a) + M(t-\sigma)a), \quad t \geqslant \sigma.\end{aligned}$$

又因为 f 是 ω 周期的且 $\lim\limits_{s\to\infty} M(s) = 0$, 所以

$$\begin{aligned}|f(t,x_t(\sigma,\varphi))| &\leqslant |f(t,0)| + L(KN(a) + aM(t-\sigma)) \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant \omega} |f(t,0)| + L(KN(a) + a\sup_{\tau\geqslant 0}|M(\tau)|) := Q(a).\end{aligned}$$

显然 $Q(a)$ 与 σ 无关, 从而引理得证. ∎

以下先假设 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 是 Banach 空间. 首先引入 Horn 不动点定理[86].

引理 1.6.2　*设 $S_0 \subset S_1 \subset S_2$ 为 Banach 空间 X 的凸子集 S_0 与 S_2 为紧的, S_1 相对于 S_2 为开的. 设 $F : S_2 \to X$ 为连续映射, 对某个整数 $m > 0$, 有 $F^j(S_1) \subset S_2$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$ 及 $F^j(S_1) \subset S_0$, $m \leqslant j \leqslant 2m-1$(这里 F^j 表示 F 的 j 次迭代), 则 F 在 S_0 中有不动点.*

定理 1.6.1　*设 f 是 ω 周期的且 (1.6.5) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界, $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的, 此外在 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 中的一致有界, 等度连续的序列总有收敛子列, 则 (1.6.5) 存在 ω 周期解.*

证明　设方程 (1.6.5) 关于界 b 是一致最终有界的. 对 $(K+1)b$, 由一致有界性知存在 $b_1 \geqslant 0$, 只要 $|\varphi| \leqslant (K+1)b$, $t \geqslant \sigma$ 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant b_1.$$

故当 $t \geqslant \sigma$ 时有

$$\begin{aligned}|x_t(\sigma,\varphi)| &\leqslant K \sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t} |x(\sigma,\varphi)(s)| + M(t-\sigma)|\varphi| \\ &\leqslant Kb_1 + (K+1)b\sup_{\tau\geqslant 0} M(\tau) \\ &\leqslant \max\{Kb_1 + b(K+1)\sup_{\tau\geqslant 0} M(\tau),\ (K+2)b\} := b_2. \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

当 $|\varphi| < b_2$ 时, 由一致有界性知存在 $b_3 > 0$, 只要 $|\varphi| < b_2, t \geqslant \sigma$ 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant b_3$, 类似上面有

$$\begin{aligned}|x_t(\sigma,\varphi)| &\leqslant Kb_3 + b_2\sup_{\tau\geqslant 0} M(\tau) \\ &\leqslant \max\{Kb_3 + b_2\sup_{\tau\geqslant 0} M(\tau), b_2 + 1\} := b_4. \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

设

$$\begin{aligned}S_0 &= \{\varphi \in \mathscr{B} |\ |\varphi| \leqslant (K+1)b, |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leqslant Q(b_4)|\theta_1 - \theta_2|, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^-\},\\ S_1 &= \{\varphi \in \mathscr{B} |\ |\varphi| < b_2, |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leqslant Q(b_4)|\theta_1 - \theta_2|, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^-\},\\ S_2 &= \{\varphi \in \mathscr{B} |\ |\varphi| \leqslant b_4, |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leqslant Q(b_4)|\theta_1 - \theta_2|, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^-\},\end{aligned}$$

容易验证 S_0, S_2 是 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 中的凸紧集, 而 S_1 相对于 S_2 是凸开集且有 $S_0 \subset S_1 \subset S_2$.

定义 S_2 到 $\mathscr{B}$ 的映射 P 如下:

$$P(\varphi) = x_{\sigma+\omega}(\sigma, \varphi).$$

由引理 1.6.1 知当 $\varphi \in S_2$ 时有

$$|f(t, x_t(\sigma, \varphi))| \leqslant Q(b_4), \quad t \geqslant \sigma.$$

再由延展定理易知 $x(\sigma, \varphi)(\sigma + \omega)$ 存在, 故 P 有定义. 由已知条件易知 PS_2 是相对紧集. 当 $|\varphi| < b_2$ 时, 由一致最终有界性, 存在 $H > 0$, 只要 $t \geqslant \sigma + H$ 就有

$$|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant b.$$

设 $t \geqslant \sigma + H$, 则

$$\begin{aligned}|x_t(\sigma, \varphi)| &\leqslant K \sup_{\sigma+H \leqslant s \leqslant t} |x(\sigma, \varphi)(s)| + M(t - \sigma - H)|x_{\sigma+H}(t, \varphi)|\\ &\leqslant Kb + M(t - \sigma - H)b_4,\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{\tau \to \infty} M(\tau) = 0$, 当 t 充分大时, 可使

$$Kb + M(t - \sigma - H)b_4 < (K+1)b.$$

故当 m 充分大时有 $P^m(S_1) \subset S_0$. 由 (1.6.6),(1.6.7) 知 $\bigcup\limits_{j=0}^{m-1} P^j(S_1) \subset S_2$. 映射 P 的连续性由解对初值的连续相依性定理保证. 由 Horn 不动点定理知映射 P 在 S_0 中存在不动点 φ^*. 容易验证 $x(\sigma, \varphi^*)(t)$, $t \geqslant \sigma$ 就是 (1.6.5) 的 ω 周期解. ∎

设 $D \subset \mathbb{R}^-$, $\varphi \in \mathscr{B}$, 记

$$|\varphi|^D = \sup_{\theta \in D} |\varphi(\theta)|.$$

定义 1.6.3 设 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 是衰减记忆的且对 $\mathbb{R}^-$ 中的任意紧集 D 及 $\varphi_n \in \mathscr{B}$, $n = 1, 2, \cdots$, 如果 $|\varphi_n|$ 有界且 $|\varphi_n - \varphi|^D \to 0$, $n \to \infty$, 则可推得 $\varphi \in \mathscr{B}$ 且 $|\varphi_n - \varphi| \to 0$, $n \to \infty$, 则称 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 具有强衰减记忆.

引理 1.6.3 设引理 1.6.1 的条件成立且 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 具有强衰减记忆, 则定理 1.6.1 证明中的 S_0, S_2 是紧致集.

证明 设 $\{\varphi_n\}$ 是 S_2 中的任一序列. $\{\varphi_n\}$ 显然是等度连续的. 下面证明 $\{\varphi_n\}$ 在 $[-k,0]$(这里 k 是任意正整数) 上对通常的最大值模而言是一致有界的. 由衰减记忆定义易证 $|\varphi_n(0)|$ 是有界的, 设其界为 N. 于是

$$|\varphi_n(\theta)-\varphi_n(0)|\leqslant Q(b_4)|\theta|,$$

$$|\varphi_n(\theta)|\leqslant Q(b_4)|\theta|+|\varphi_n(0)|\leqslant Q(b_4)k+N,\quad \theta\in[-k,0],$$

$$|\varphi_n|^{[-k,0]}\leqslant Q(b_4)k+N.$$

因此 $\{|\varphi_n|^{[-1,0]}\}$ 是一致有界的. 故由 Ascoli-Arzela 定理, 在 $[-1,0]$ 上 $\{\varphi_n\}$ 有一致收敛子列, 设为 $\{\varphi_n^{(1)}\}$. 同理, $\{\varphi_n^{(1)}\}$ 在 $[-2,0]$ 上有一致收敛子列, 设为 $\{\varphi_n^{(2)}\}$, 以此类推, 易知 $\{\varphi_n^{(n)}\}$ 在 $\mathbb{R}^-$ 的紧子集上收敛于一连续函数 φ, 故 $\varphi\in B$ 且 $|\varphi_n^{(n)}-\varphi|\to 0, n\to\infty$.

对任意取定的 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时有

$$|\varphi|-|\varphi_n^{(n)}|\leqslant|\varphi-\varphi_n^{(n)}|<\varepsilon,$$

$$|\varphi|\leqslant|\varphi_n^{(n)}|+\varepsilon\leqslant b_4+\varepsilon,$$

因 $\varepsilon>0$ 可以任意小, 故 $|\varphi|\leqslant b_4$. 又显然有

$$|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant Q(b_4)|\theta_1-\theta_2|,$$

故 $\varphi\in S_2$, 因而 S_2 是紧集. 类似地, 可证明定理 1.6.1 证明中的 S_0 也是紧集. ■

定理 1.6.2 设 $(\mathscr{B},|\cdot|)$ 具有强衰减记忆, f 是 ω 周期的. 若方程 (1.6.5) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界, $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的, 则方程 (1.6.5) 存在 ω 周期解.

在下面的讨论中, 不失一般性, 假设 $\sigma=0$.

定理 1.6.3 假设

(1) 对任意 $(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{B}, f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$, 且存在非负连续函数 $L(t)$, 使得 $|f(t,\varphi)|\leqslant L(t)$;

(2) $(\mathscr{B},|\cdot|)$ 是 Banach 空间且 $(\mathscr{B},|\cdot|)$ 中的一致有界, 等度连续序列总有收敛子列;

(3) 方程 (1.6.5) 的解关于界 b 是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的,

则方程 (1.6.5) 存在 ω 周期解.

证明 令 $L=\sup\limits_{t\in[0,\omega]}L(t)$, 由条件(1)易知对任意的 $(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 有 $|f(t,\varphi)|\leqslant L$. 对 $(K+1)b$, 由解的一致最终有界性知存在 $T_1=T((K+1)b)$, 只要 $|\varphi|\leqslant(K+1)b, t\geqslant T_1$ 就有 $|x(0,\varphi)(t)|\leqslant b$. 令

$$S_0=\{\varphi\in\mathscr{B}|\ |\varphi|\leqslant(K+1)b, |\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L|\theta_1-\theta_2|, \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^-\},$$

则容易证明 S_0 是 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 中的凸紧集.

定义映射 $g_1 : [0, T_1] \times S_0 \to \mathbb{R}^n$ 如下:

$$g_1(t, \varphi) = x(0, \varphi)(t),$$

则由解对初值的连续相依性, g_1 连续, 因而存在 $b_0 > 0$, 只要 $\varphi \in S_0$ 就有

$$|x(0, \varphi)(t)| \leqslant b_0, \quad t \in [0, T_1].$$

取 $b_1 = \max\{b, b_0\}$, 只要 $\varphi \in S_0, t \geqslant 0$ 有

$$|x(0, \varphi)(t)| \leqslant b_1,$$

而且存在 $b_2 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} |x_t(0, \varphi)| &\leqslant K \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |x(0, \varphi)(s)| + M(t)|\varphi| \\ &\leqslant K b_1 + (K+1) b \sup_{\tau \geqslant 0} M(\tau) \leqslant b_2. \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

对于 b_2, 由一致最终有界性知存在 $T_2 (> T_1)$, 只要 $|\varphi| \leqslant b_2, t \geqslant T_2$ 就有

$$|x(0, \varphi)(t)| \leqslant b.$$

令

$$S_1 = \{\varphi \in \mathscr{B} |\ |\varphi| < b_2, |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leqslant L|\theta_1 - \theta_2|, \theta_1 \in \mathbb{R}^-, \theta_2 \in \mathbb{R}^-\},$$

$$\bar{S}_1 = \{\varphi \in \mathscr{B} |\ |\varphi| \leqslant b_2, |\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leqslant L|\theta_1 - \theta_2|, \theta_1 \in \mathbb{R}^-, \theta_2 \in \mathbb{R}^-\}.$$

易证, $\bar{S}_1$ 是 $(\mathscr{B}, |\cdot|)$ 中的凸紧集, 定义映射 $g_2 : [0, T_2] \times \bar{S}_1 \to \mathbb{R}^n$ 为

$$g_2(t, \varphi) = x(0, \varphi)(t),$$

则 g_2 为连续映射, 因而存在 $a > 0$, 只要 $\varphi \in \bar{S}_1$ 就有

$$|x(0, \varphi)(t)| \leqslant a, \quad t \in [0, T_2].$$

特别地, $\varphi \in S_1$ 时有

$$|x(0, \varphi)(t)| \leqslant a, \quad t \in [0, T_2].$$

令 $b_3 = \max\{a, b\}$, 只要 $\varphi \in S_1, t \geqslant 0$ 就有

$$|x(0, \varphi)(t)| \leqslant b_3,$$

而且存在 $b_4 \geqslant 0$, 只要 $t \geqslant 0, \varphi \in S_1$ 就有

$$|x_t(0, \varphi)| \leqslant K b_3 + b_2 \sup_{\tau \geqslant 0} M(\tau) \leqslant b_4. \tag{1.6.9}$$

令

$$S_2=\{\varphi\in\mathscr{B}||\varphi|\leqslant b_4,|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L|\theta_1-\theta_2|,\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^-\},$$

则 S_2 是凸紧集, S_1 相对于S_2 是凸开集且 $S_0\subset S_1\subset S_2$.

定义映射 $P:S_2\to\mathscr{B}$ 如下:

$$P(\varphi)=x_\omega(0,\varphi).$$

由解对初值的连续依赖性, P 为连续映射, 由 f 的周期性有

$$P^k(\varphi)=x_{k\omega}(0,\varphi),\quad k=1,2,\cdots.$$

由 f 的有界性及延展定理, 映射 P 是有定义的. 由上面证明知只要 $\varphi\in S_1,t\geqslant T_2$ 就有

$$|x(0,\varphi)(t)|\leqslant b.$$

设 $t>T_2$, 则有

$$\begin{aligned}|x_t(0,\varphi)|&\leqslant K\sup_{T_2\leqslant s\leqslant t}|x(0,\varphi)(s)|+M(t-T_2)|x_{T_2}(0,\varphi)|\\&\leqslant Kb+M(t-T_2)b_4.\end{aligned}$$

由于 $M(\tau)\to0,\tau\to+\infty$, 所以当 t 充分大时有

$$|x_t(0,\varphi)|<(K+1)b,$$

因而存在充分大的 m, 使得 $k\geqslant m$ 时有

$$P^k(S_1)\subset S_0.$$

由 (1.6.8), (1.6.9) 可知

$$P^k(S_1)\subset S_2,\quad k=0,1,\cdots,m-1.$$

由 Horn 不动点定理知 P 在 S_0 中有不动点, 设为 φ^*, 即

$$x_\omega(0,\varphi^*)=\varphi^*.$$

再由 f 的周期性知 $x(0,\varphi^*)(t)$ 为 ω 周期解, 定理证毕. ∎

定理 1.6.4　*设定理 1.6.3 中条件 (1),(3) 成立,$(\mathscr{B},|\cdot|)$ 具有强衰减记忆, 则 (1.6.5) 存在 ω 周期解.*

定理 1.6.5　*若定理 1.6.1 ~ 定理 1.6.4 之一的条件满足, 但 $(\mathscr{B},|\cdot|)$ 不必是 Banach 空间, 则存在正整数 m, 使方程 (1.6.5) 存在 $m\omega$ 周期解.*

证明　用前面的符号, $(\mathscr{B},|\cdot|)$ 显然是局部凸的拓扑向量空间, 当 m 充分大时, 由前面定理的证明知 P^m 是凸集 S_1 到自身的紧映射, 故由 Schauder 不动点定理知 P^m 在 S_1 中存在不动点 φ^*, 易证明 $x(\sigma,\varphi^*)(t)$, $t\geqslant\sigma$ 就是方程 (1.6.5) 的以 $m\omega$ 为周期的周期解. ∎

第 2 章　$\mathscr{C}_h$ 空间及其应用

第 1 章介绍了一般的公理化相空间理论及其应用, 可以看出应用相空间理论来研究具有无限时滞的泛函微分方程的理论问题, 具有许多优点. 例如, 把各种具体问题和具体方程对于相空间的共同要求归纳总结成为公理体系, 这非常有利于具有无限时滞的泛函微分方程基本理论的发展, 使基本理论更加条理化、系统化, 并避免了许多可能的重复性工作; 相空间理论为应用泛函分析、拓扑学、近世代数等现代数学中的强有力的方法来解决具有无限时滞泛函微分方程的问题提供了一个很好的环境.

另一方面, 大量研究工作表明, 在解决具体问题时, 适当地选取相空间, 可以起到很大的促进作用, 相空间是解决具体问题的有力工具. 对于不同的方程和不同的具体问题, 可以采用不同形式的相空间. 国内外许多学者相继建立了一些更加便于应用的具体的相空间.

本章介绍本书作者所建立的 $\mathscr{C}_h$ 相空间理论及其应用. $\mathscr{C}_h$ 空间是一个具有优良特性的具体的相空间, 特别对处理在实际中有重要意义的 Volterra 型积分微分方程极为有效.

2.1　$\mathscr{C}_h$ 空间及其性质

设 $h \in C(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^+), h(s) > 0, l = \int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s < \infty$. 定义集合

$$\mathscr{C}_h := \left\{ \varphi \in \mathscr{C} \left| \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s < \infty \right. \right\}.$$

易证 $\mathscr{C}_h$ 是 $\mathscr{C}$ 的线性子空间, BC 则是 $\mathscr{C}_h$ 的线性子空间. 对于 $\varphi \in \mathscr{C}_h$, 定义

$$|\varphi|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s < \infty,$$

则 $|\cdot|_h$ 是 $\mathscr{C}_h$ 的模. 为了符号简洁, 将 $(\mathscr{C}_h, |\cdot|_h)$ 简记为 $\mathscr{C}_h$.

引理 2.1.1　*对任意 $\varepsilon > 0$, $K > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, 使得对任意 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}_h$, 当 $|\varphi_1 - \varphi_2|_h \leqslant \delta$ 时有 $|\varphi_1 - \varphi_2|^{[-K,0]} < \varepsilon$.*

证明　用反证法. 设存在 $\varepsilon' > 0$, $K' > 0$, 使得对于任意 $\delta > 0$, 均存在 φ_1', $\varphi_2' \in \mathscr{C}_h$, 满足 $|\varphi_1' - \varphi_2'|_h \leqslant \delta$, 但有 $|\varphi_1' - \varphi_2'|^{[-K',0]} \geqslant \varepsilon'$. 记 $l' = \int_{-\infty}^{-K'} h(s)\mathrm{d}s > 0$, 取 $\delta' < \varepsilon' l'$, 于是存在 φ_1', $\varphi_2' \in \mathscr{C}_h$, 满足 $|\varphi_1' - \varphi_2'|_h \leqslant \delta'$, 但 $|\varphi_1' - \varphi_2'|^{[-K',0]} > \varepsilon'$, 从而有

$$\begin{aligned}|\varphi_1' - \varphi_2'|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_1' - \varphi_2'|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{-K'} h(s)|\varphi_1' - \varphi_2'|^{[s,0]}\mathrm{d}s + \int_{-K'}^{0} h(s)|\varphi_1' - \varphi_2'|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &\geqslant \int_{-\infty}^{-K'} h(s)|\varphi_1' - \varphi_2'|^{[s,0]}\mathrm{d}s \geqslant \varepsilon' \int_{-\infty}^{-K'} h(s)\mathrm{d}s = \varepsilon' l',\end{aligned}$$

从而 $\delta' \geqslant \varepsilon' l'$, 矛盾. 引理得证. ∎

引理 2.1.2　*设 $\varphi_n \in \mathscr{C}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 为一致有界序列 (从而 $\varphi_n \in \mathscr{C}_h$), 则*

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi_0|_h = 0$$

当且仅当对任意正整数 $k > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi_0|^{[-k,0]} = 0.$$

证明　先证充分性. 设 $|\varphi_n|^{\mathbb{R}^-} \leqslant H$. 因为 $l = \int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s < +\infty$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $K > 0$, 使得 $\int_{-\infty}^{-K} h(s)\mathrm{d}s < \varepsilon$. 同时, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 对任意的正整数 k 有 $|\varphi_n - \varphi_0|^{[-k,0]} \leqslant \varepsilon$, 从而有 $|\varphi_0|^{[-k,0]} \leqslant H + \varepsilon$. 所以当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}|\varphi_n - \varphi_0|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi_0|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &= \int_{-\infty}^{-K} h(s)|\varphi_n - \varphi_0|^{[s,0]}\mathrm{d}s + \int_{-K}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi_0|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &\leqslant (2H + \varepsilon)\varepsilon + l\varepsilon = (2H + l + \varepsilon)\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性得证. 必要性可由引理 2.1.1 直接推出. ∎

定理 2.1.1　*$(\mathscr{C}_h, |\cdot|_h)$ 是 Banach 空间.*

证明 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $\mathscr{C}_h$ 中的 Cauchy 序列, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n, m > N$ 时有

$$|\varphi_n - \varphi_m|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi_m|^{[s,0]}\mathrm{d}s < \varepsilon.$$

由于

$$\begin{aligned}||\varphi_n|_h - |\varphi_m|_h| &\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)\left||\varphi_n|^{[s,0]} - |\varphi_m|^{[s,0]}\right|\mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi_m|^{[s,0]}\mathrm{d}s = |\varphi_n - \varphi_m|_h,\end{aligned}$$

所以 $\{|\varphi_n|_h\}$ 也是 Cauchy 序列, 从而是有界序列. 设 $|\varphi_n|_h \leqslant M$.

下面往证: 对任意 $K > 0$, $\{|\varphi_n|^{[-K,0]}\}$ 有界.

如若不然, 则存在 n_i, $i = 1, 2, \cdots$, 使得 $|\varphi_{n_i}|^{[-K,0]} \geqslant i$. 于是有

$$\begin{aligned}|\varphi_{n_i}|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_{n_i}|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\ &\geqslant \int_{-\infty}^{-K} h(s)|\varphi_{n_i}|^{[s,0]}\mathrm{d}s \geqslant i\int_{-\infty}^{-K} h(s)\mathrm{d}s \to \infty.\end{aligned}$$

这是一个矛盾, 由此证得 $\{|\varphi_n|^{[-K,0]}\}$ 有界. 由引理 2.1.2, 当 N 充分大时有

$$|\varphi_n - \varphi_m|^{[-K,0]} \leqslant \varepsilon,$$

从而存在 $[-K,0]$ 上的连续函数 φ, 使得

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi|^{[-K,0]} = 0.$$

由 K 的任意性, φ 可以延展成 $\mathbb{R}^-$ 上的连续函数. 因为 $|\varphi_n - \varphi_m|^{[s,0]}$ 在 $[-K,0]$ 上有界, 在下式中令 $m \to \infty$,

$$\int_{-K}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi_m|^{[s,0]}\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon,$$

得到

$$\int_{-K}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon.$$

又由 K 的任意性有

$$|\varphi_n-\varphi|_h=\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi_n-\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi_n-\varphi|_h=0$. 再由 $\{\varphi_n\}$ 在 $[-K,0]$ 上的有界性及 K 的任意性, 由不等式

$$\int_{-K}^{0}h(s)|\varphi_n|^{[s,0]}\mathrm{d}s\leqslant\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi_n|^{[s,0]}\mathrm{d}s=|\varphi_n|_h\leqslant M$$

立即可得

$$|\varphi|_h=\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s<\infty,$$

从而 $\varphi\in\mathscr{C}_h$, $(\mathscr{C}_h,|\cdot|_h)$ 是 Banach 空间. ∎

定理 2.1.2　$\mathscr{C}_h$ 空间满足条件 $(\mathrm{B}_1)\sim(\mathrm{B}_4)$.

证明　首先验证 (B_1). 设 $\varphi\in\mathscr{C}_h, A>0, x\in\mathbb{R}^n$ 为定义在 $(-\infty,A]$ 上满足 $x_0=\varphi$ 的函数且在 $[0,A]$ 上连续. 往证: 对于所有的 $t\in[0,A]$, $x_t\in\mathscr{C}_h$ 且 x_t 对 t 连续. 事实上,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}h(s)|x_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s&=\int_{-\infty}^{-t}h(s)|x_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s+\int_{-t}^{0}h(s)|x_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-t}h(s)\max\{|\varphi|^{[s+t,0]},|x_t|^{[-t,0]}\}\mathrm{d}s+\int_{-t}^{0}h(s)|x|^{[0,t]}\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s+2l|x|^{[0,A]}<\infty.\end{aligned}$$

这表明 $x_t\in\mathscr{C}_h$, $t\in[0,A)$.

设 $t_0\in[0,A]$, $t\in[0,A]$. 不失一般性, 可令 $0\leqslant t_0<t$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M(t_0,\varepsilon)>0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{-M}h(s)|x_{t_0}|^{[s,0]}\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{4},\quad\int_{-\infty}^{-M}h(s)\mathrm{d}s<\frac{\varepsilon}{4L},$$

此处 $|x|^{[0,A]}\leqslant L$. 设 $|t-t_0|$ 取得如此之小, 使得

$$\sup_{-M\leqslant\theta\leqslant0}|x_t(\theta)-x_{t_0}(\theta)|<\frac{\varepsilon}{4l},$$

则有

$$
\begin{aligned}
|x_t - x_{t_0}|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t - x_{t_0}|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-M} h(s)(|x_t|^{[s,0]} + |x_{t_0}|^{[s,0]})\mathrm{d}s + \int_{-M}^{0} h(s)|x_t - x_{t_0}|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-M} h(s)\left[\max\left\{|x|^{[t_0,t]}, |x_{t_0}|^{[s,0]}\right\} + |x_{t_0}|^{[s,0]}\right]\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-M}^{0} h(s)|x_t - x_{t_0}|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-M} h(s)(L + 2|x_{t_0}|^{[s,0]})\mathrm{d}s + l|x_t - x_{t_0}|^{[-M,0]} \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}
$$

从而 (B_1) 成立.

再验证 (B_2). 对于 $\varphi \in \mathscr{C}_h$ 及 $\beta > 0$, φ^β 表示 φ 在 $(-\infty, -\beta]$ 上的限制. 易于证明

$$
|\varphi|_\beta = \inf\{|\psi|_h | \psi \in \mathscr{C}_h, \psi^\beta = \varphi^\beta\} = \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)|\varphi|^{[s,-\beta]}\mathrm{d}s.
$$

于是有

$$
|\varphi|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \leqslant |\varphi|_\beta + 2l|\varphi|^{[-\beta,0]}.
$$

(B_2) 得证.

(B_3) 可由下面不等式证得:

$$
|\tau^\beta\varphi|_\beta = \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)|\varphi|^{[s+\beta,0]}\mathrm{d}s \leqslant \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \leqslant |\varphi|_h.
$$

最后, 由于

$$
|\varphi|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \geqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi(0)|\mathrm{d}s = l|\varphi(0)|,
$$

(B_4) 得证. 定理证毕. ∎

定理 2.1.3 若存在连续函数 $M(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 满足

$$
h(s-t) \leqslant M(t)h(s),\ t \geqslant 0 \geqslant s, \quad \lim_{t\to+\infty} M(t) = 0,
$$

则空间 $\mathscr{C}_h$ 是容许的且具衰减记忆.

证明　设 $0 \leqslant \sigma < A \leqslant \infty$, $x:(-\infty, A] \to \mathbb{R}^n$ 在 $[\sigma, A)$ 上连续, $x_\sigma \in \mathscr{C}_h$, 则当 $t \geqslant \sigma$ 时有

$$\begin{aligned}|x_t|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s = \left(\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} + \int_{-(t-\sigma)}^{0}\right) h(s)|x_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)|x|^{[s+t,\sigma]}\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)|x|^{[\sigma,t]}\mathrm{d}s + \int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)|x|^{[\sigma,t]}\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s+\sigma-t)|x|^{[s+\sigma,\sigma]}\mathrm{d}s + l|x|^{[\sigma,t]} \\ &\leqslant l|x|^{[\sigma,t]} + M(t-\sigma)|x_\sigma|_h.\end{aligned}$$

引理得证. ■

本节内容主要取自文献 [164]~[166].

2.2　利用 $\mathscr{C}_h$ 空间研究泛函微分方程解的有界性

设 Ω 是 $\mathbb{R} \times \mathscr{C}_h$ 上的开集, $f(t,\varphi)$ 在 Ω 上连续. 考虑方程

$$x' = f(t, x_t), \tag{2.2.1}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$. 还假设存在连续函数 $n(t)$, 使得对任意 $(t,\varphi),(t,\psi) \in \Omega$ 有

$$|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \leqslant n(t)|\varphi - \psi|,$$

则 (2.2.1) 的初值解是唯一的且对初始条件具有连续相依性.

定义 2.2.1　如果对 $\sigma \geqslant 0$, $\varphi \in \mathscr{C}_h$, 存在 $M = M(\sigma,\varphi)$, 使得对一切 $t \geqslant \sigma$, 有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|_h \leqslant M \quad (|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant M),$$

则称方程 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 有界 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 有界) 的.

定义 2.2.2　如果对任意的 $\sigma \geqslant 0$, $H > 0$, 存在 $M = M(\sigma, H) > 0$, 使得当 $|\varphi|_h \leqslant H$, $t \geqslant \sigma$ 时有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|_h \leqslant M \quad (|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant M),$$

则称方程 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度有界 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度有界) 的.

定义 2.2.3　如果在定义 2.2.2 中, $M = M(H) > 0$, 则称方程 (2.2.1) 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致有界 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界) 的.

定义 2.2.4 如果存在 $M>0$, 使得对任意的 $\sigma\geqslant 0,\varphi\in\mathscr{C}_h$, 存在 $T=T(\sigma,\varphi)>0$, 当 $t\geqslant\sigma+T$ 时, 有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|_h\leqslant M\quad(|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant M),$$

则称方程 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 最终有界 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 最终有界) 的.

定义 2.2.5 如果存在 $M>0$, 使得对任意的 $\sigma\geqslant 0$, $H>0$, 存在 $T=T(\sigma,H)>0$, 当 $|\varphi|_h\leqslant H,t\geqslant\sigma+T$ 时有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|_h\leqslant M\quad(|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant M),$$

则称方程 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度最终有界 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度最终有界) 的.

定义 2.2.6 如果在定义 2.2.5 中, $T=T(H)$, 则称方程 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致最终有界 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界) 的.

我们还要用到泛函 $V(t,\varphi):\Omega\to\mathbb{R}^+$ 及其沿方程 (2.2.1) 的解的上右导数 $V'_{(2.2.1)}(t,x_t)$, 总假定 $V'_{(2.2.1)}(t,x_t)$ 存在. 这样的条件易于根据文献 [42] 的条件列出, 这里不再赘述.

定理 2.2.1 如果存在泛函 $V(t,\varphi)$ 及楔函数 $W_i(r)(i=1,2,3)$, $W(r)$ 以及常数 $U>0$, 使得对于 (2.2.1) 的任意解 $x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$ 有

(1) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant W_2(|x(t)|)+W_3(|x_t|_h)$, $t\geqslant\sigma$;

(2) $V'_{(2.2.1)}(t,x_t)\leqslant -|W'_{(2.2.1)}(|x(t)|)|$, 当 $|x(t)|\geqslant U$ 时;

(3) $\lim\limits_{r\to\infty}[2W(r)-W_3(H+lr)]=+\infty$ 对任意 $H>0$ 成立,

则 (2.2.1) 的解 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界.

证明 设给定 $H>0$, 对于满足 $|\varphi|_h\leqslant H$ 的 φ 有

$$|\varphi|_h\geqslant l|\varphi(0)|,\quad 即\quad |\varphi(0)|\leqslant\frac{|\varphi|_h}{l}\leqslant\frac{H}{l}.$$

不妨取 $U>H/l$. 由 (3) 可知存在 $M>U$, 使当 $r\geqslant M$ 时有

$$2W(r)>W_3(H+lr)+W_2(U)+2W(U).$$

考虑 (2.2.1) 的解 $x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$, $t\geqslant\sigma$, $|\varphi|_h\leqslant H$, 则或者

(A) $|x(t)|<M$, $t\geqslant\sigma$,

或者

(B) 存在第一个 $t_1>\sigma$ 使 $|x(t_1)|=M$.

当 (B) 成立时, 由 (2) 可知 $|x(t)|>U$ 不可能对所有的 $t\geqslant\sigma$ 都成立, 必然有第一个 $t_2>t_1$ 使 $|x(t_2)|=U$. 设

$$|x(T)|=\max_{t_1\leqslant s\leqslant t_2}|x(t)|,$$

则有 $|x(T)|\geqslant M$. 往证: 对所有 $t\geqslant\sigma$, 有 $|x(t)|\leqslant|x(T)|$.

若不然, 必存在第一个区间 $[t_3, t_4]$, $t_3 \geqslant t_2$, 使得

$$|x(t_3)| = U,\ |x(t_4)| > |x(T)|,\ |x(t)| \geqslant U, \quad t \in [t_3, t_4].$$

又必定存在第一个 $t_5 > t_4$, 使得 $|x(t_5)| = U$, 所以有

$$\begin{aligned}
V(t_5, x_{t_5}) &\leqslant V(t_3, x_{t_3}) - \int_{t_3}^{t_4} |W'_{(2.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s - \int_{t_4}^{t_5} |W'_{(2.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant W_2(|x(t_3)|) + W_3(|x_{t_3}|_h) - 2W(|x(T)|) + 2W(U) \\
&= W_2(U) + W_3\left(\int_{-\infty}^{0} h(s)|x_{t_3}|^{[s,0]}\mathrm{d}s\right) - 2W(|x(T)|) + 2W(U) \\
&\leqslant W_2(U) + W_3\left(\int_{-\infty}^{0} h(s)\max\{|\varphi|^{[s,0]}, |x|^{[\sigma,t_3]}\}\mathrm{d}s\right) \\
&\quad -2W(|x(T)|) + 2W(U) \\
&\leqslant W_2(U) + W_3(H + l|x(T)|) - 2W(|x(T)|) + 2W(U) < 0.
\end{aligned}$$

这矛盾表明 $|x(t)| \leqslant |x(T)|$, $t \geqslant \sigma$.

由 (2) 有

$$\begin{aligned}
0 \leqslant V(T, x_T) &\leqslant V(t_1, x_{t_1}) - \int_{t_1}^{T} |W'_{(2.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant V(t_1, x_{t_1}) - W(|x(T)|) + W(|x(t_1)|),
\end{aligned}$$

所以

$$0 \leqslant W_2(|x(t_1)|) + W_3(|x_{t_1}|_h) - W(|x(T)|) + W(|x(t_1)|),$$

从而

$$\begin{aligned}
W(|x(T)|) &\leqslant W_2(|x(t_1)|) + W_3\left(\int_{-\infty}^{0} h(s)|x_{t_1}|^{[s,0]}\mathrm{d}s\right) + W(|x(t_1)|) \\
&\leqslant W_2(M) + W(M) + W_3(H + lM).
\end{aligned}$$

最后可得当 $t \geqslant \sigma$ 时,

$$|x(T)| \leqslant W^{-1}(W_2(M) + W(M) + W_3(H + lM)) := D(H).$$

于是 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的. ∎

定义 2.2.7　设对任意连续函数 $x(t), t \geqslant \sigma, \sigma \in \mathbb{R}$, 泛函 $V(t,\varphi)$ 满足

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_h).$$

称 $V(t,\varphi)$ 是 h 一致健忘的, 如果对任意 $a > 0, \delta > 0$, 存在 $T = T(a,\delta) > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma + T$, $|x_\sigma|_h \leqslant \delta$ 时, 有

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant a + W_2(|x(t)|) + W_3(l|x|^{[\sigma,t]}).$$

例 2.2.1 设 $h(s)=\mathrm{e}^s$, 故 $l=\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s=1$.

令

$$V(t,x_t)=|x(t)|+\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(u-s)}|x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

易证

$$|x(t)|\leqslant V(t,x_t)\leqslant |x(t)|+|x_t|_h.$$

对任意 $a>0,\delta>0$, 取 $T>0$ 使 $\mathrm{e}^{-T}\leqslant\frac{a}{\delta}$, 则当 $t\geqslant\sigma+T$, $|x_\sigma|_h\leqslant\delta$ 时有

$$V(t,x_t)\leqslant a+|x(t)|+|x|^{[\sigma,t]}.$$

故 $V(t,x_t)$ 是 h 一致健忘的.

例 2.2.2 设 $h(s)=1/(1-s)^2$, 故 $l=1$. 不难证明

$$V(t,x_t)=|x(t)|+\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}\frac{|x(s)|}{[1+(u-s)]^4}\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

是 h 一致健忘的.

定理 2.2.2 *如果存在 $V(t,\varphi)$ 满足定理 2.2.1 的条件且 $V(t,\varphi)$ 是 h 一致健忘的, 则 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.*

证明 选取 $M>U$, 使得 $r>M$ 时有

$$2W(r)>W_3(lr)+3W_2(U)+2W(U).$$

由定理 2.2.1 知方程 (2.2.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的, 故对任意 $H>0$, 存在 $D(H)>0$, 使得当 $t>\sigma$, $|\varphi|_h\leqslant H$ 时有 $|x(t,\sigma,\varphi)|\leqslant D$. 不妨设 $D>M$. 因为 $W(r)$ 在 $[M,D]$ 上一致连续, 存在正数 $m=m(H)<M-U$, 使得当 $r\in[M,D]$ 时 $W(r)-W(r-m)<\frac{W_2(U)}{2}$, 从而有

$$2W(r-m)-W_3(lr)>2W(U)+2W_2(U).$$

由 (2) 知存在 $L>0$, 使 $|x(t)|\geqslant U$ 不能在长为 L 的区间上成立. 同时, 对于 $a=W_2(U)$, $R=H+lD>0$, 存在 $S=S(H)>0$, 使得当 $t\geqslant\sigma+S$, $|x_\sigma|_h\leqslant R$ 时有

$$0\leqslant V(t,x_t)\leqslant W_2(U)+W_2(|x(t)|)+W_3(l|x|^{[\sigma,t]}).$$

令 $I_i=[\sigma+(i-1)(L+S),\sigma+i(L+S)],i=1,2,\cdots$. 在任意 I_i 上, 或者

(A) $|x(t)|\leqslant M$,

或者

(B) 存在 $t^* \in I_i$, 使得 $|x(t^*)| > M$.

如果 (A) 成立, 则或者

(AI) $|x(t)| < M$ 对所有 $t > \sigma + i(L+S)$ 成立,

或者

(AII) 存在第一个 $t_1 > \sigma + i(L+S)$, 使 $|x(t_1)| = M$.

当 (AII) 成立时, 由 (2), 存在第一个 $t_2 > t_1$, 使得 $|x(t_2)| = U$. 令

$$|x(t')| = \max_{\sigma+(i-1)(L+S)\leqslant t\leqslant t_2} |x(t)|.$$

显然有 $|x(t')| \geqslant M$. 往证 $|x(t)| \leqslant |x(t')|$, $t > t_2$. 设不然, 必有某个 $t > t_2$, 使得 $|x(t)| > |x(t')|$, 从而在 t_2 的右方存在第一个区间 $[t_3, t_5]$, 满足

$$|x(t_3)| = U = |x(t_5)|,\ |x(t)| \geqslant U, \quad t \in [t_3, t_5],$$

且存在 $t_4 \in (t_3, t_5)$, 使 $|x(t_4)| = |x(t')|$. 于是有

$$\begin{aligned} V(t_5, x_{t_5}) &\leqslant V(t_3, x_{t_3}) - 2W(|x(t_4)|) + 2W(U) \\ &\leqslant W_2(U) + W_2(|x(t_3)|) + W_3(l|x|^{[\sigma+(i-1)(L+S),t_3]}) \\ &\quad -2W(|x(t_4)|) + 2W(U) \\ &\leqslant 2W_2(U) + W_3(l|x(t')|) - 2W(|x(t')|) + 2W(U) < 0, \end{aligned}$$

矛盾! 从而 $|x(t)| \leqslant |x(t')|$, $t > t_2$, 即 $|x(t)| \leqslant |x(t')|$, $t \geqslant \sigma + (i-1)(L+S)$. 由 (2) 有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant V(t', x_{t'}) &\leqslant V(t_1, x_{t_1}) - \int_{t_1}^{t'} |W'_{(2.2.1)}(|x(s)|)| \mathrm{d}s \\ &\leqslant W_2(U) + W_2(M) + W_3(lM) - W(|x(t')|) + W(M). \end{aligned}$$

于是

$$W(|x(t')|) \leqslant W_2(U) + W_2(M) + W_3(lM) + W(M)$$

以及当 $t \geqslant \sigma + (i-1)(L+S)$ 时,

$$|x(t)| \leqslant |x(t')| \leqslant W^{-1}(W_2(U) + W_2(M) + W_3(lM) + W(M)) := b.$$

总之, 当 (A) 成立时有 $|x(t)| \leqslant b$, $t \geqslant \sigma + (i-1)(L+S)$.

再讨论 (B) 成立的情形. 由条件存在 $t^* \in I_i$, 使 $|x(t^*)| > M$. 由 (2), 存在 $t_6 \in I_{i+1}$, 使 $|x(t_6)| < U$. 设

$$M_i = \max_{\sigma+(i-1)(L+S)\leqslant t\leqslant t_6} |x(t)|.$$

往证: 当 $t \geqslant t_6$ 时有 $|x(t)| \leqslant M_i - m$. 若不然, 存在第一个 $t_7 > t_6$, 使得 $|x(t_7)| > M_i - m$, 则存在第一个区间 $t_8 < t_9 < t_{10}$, 使得

$$|x(t)| \leqslant M_i, \quad t \in [t_6, t_8],$$

而

$$|x(t_8)| = U = |x(t_{10})|, \ |x(t_9)| = M_i - m, \ |x(t)| \geqslant U, \quad t \in [t_8, t_{10}].$$

于是

$$\begin{aligned} V(t_{10}, x_{t_{10}}) &\leqslant V(t_8, x_{t_8}) - \int_{t_8}^{t_9} |W'_{(2.2.1)}(|x(s)|)| \mathrm{d}s - \int_{t_9}^{t_{10}} |W'_{(2.2.1)}(|x(s)|)| \mathrm{d}s \\ &\leqslant 2W_2(U) + W_3(lM_i) - 2W(M_i - m) + 2W(U) < 0. \end{aligned}$$

这矛盾表明当 $t \geqslant t_6$ 时, $|x(t)| \leqslant M_i - m$, 从而当 $t \geqslant \sigma + (i+1)(L+S)$ 时 $|x(t)| \leqslant M_i - m$. 由于 $M_i \leqslant D(H)$, 故情形 (B) 至多在有限个区间 I_i 上成立, 即情形 (A) 一定会出现. 取正整数 n 使得 $nm > D(H)$, 并令 $T' = 2n(S+L)$. 易证: 当 $t \geqslant \sigma + T'$, $|\varphi|_h \leqslant H$ 时有 $|x(t, \sigma, \varphi)| \leqslant b$. 定理证毕. ∎

本节内容主要取自文献 [165, 166].

2.3 利用 $\mathscr{C}_h$ 空间研究泛函微分方程解的稳定性

设 Ω 是 $\mathbb{R} \times \mathscr{C}_h$ 上的开集, $f(t, \varphi) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 连续且 $f(t, 0) \equiv 0$. 考虑方程

$$x' = f(t, x_t). \tag{2.3.1}$$

定义 2.3.1 方程 (2.3.1) 的定义在 $[0, +\infty]$ 上的解 $u(t)$ 称为是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定) 的, 如果对任意 $\sigma \geqslant 0, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|\varphi - u_\sigma|_h \leqslant \delta$, 就有

$$|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|_h < \varepsilon \tag{2.3.2}$$

$$(|x(\sigma, \varphi)(t) - u(t)| < \varepsilon) \tag{2.3.3}$$

对所有 $t \geqslant \sigma$ 成立. 方程 (2.3.1) 的解 $u(t)$ 称为是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定) 的, 如果 δ 与 σ 无关.

定义 2.3.2 方程 (2.3.1) 的解 $u(t)$ 称为是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 渐近稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定) 的, 如果 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定) 的, 且对任意 $\sigma \geqslant 0$ 存在常数 $\delta_0 > 0$, 使得只要 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta_0$ 就有

$$|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|_h \to 0, \quad t \to +\infty \tag{2.3.4}$$

$$(|x(\sigma, \varphi)(t) - u(t)| \to 0, \quad t \to +\infty). \tag{2.3.5}$$

定义 2.3.3 在定义 2.3.2 中, 如果 (2.3.4)((2.3.5)) 中解的收敛是一致的, 即对任意 $\sigma \geqslant 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma + T$ 时, (2.3.2) ((2.3.3)) 成立, 则解 $u(t)$ 称为是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度渐近稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度渐近稳定) 的.

定义 2.3.4　如果 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定）的, 且在定义 2.3.3 中的 T 与 σ 无关, 则 $u(t)$ 称为是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致渐近稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定) 的.

定义 2.3.5　方程 (2.3.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 指数渐近稳定 ($\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定）的, 如果对任意 $\sigma \geqslant 0$ 和 γ, H 存在常数 $c > 0$ 和非负函数 $L(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma$, 使得只要 $|\varphi - u_\sigma|_h < \gamma \leqslant H$ 就有

$$|x_t(\sigma,\varphi) - u_t|_h \leqslant L(|\varphi - u_\sigma|_h)\exp(-c(t-\sigma)), \quad t \geqslant \sigma$$

$$(|x(\sigma,\varphi)(t) - u(t)| \leqslant L(|\varphi - u_\sigma|_h)\exp(-c(t-\sigma)), \quad t \geqslant \sigma).$$

如果 $H = \gamma = +\infty$, 则 $u(t)$ 称为是全局 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 指数渐近稳定 (全局 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定) 的.

定理 2.3.1　如果存在 h 一致健忘的泛函 $V(t,\varphi)$, 楔函数 $W_i(r)$, $i = 1,2,3,4$, $W(r)$, 使得对 (2.3.1) 的任意解 $x(t) = x(\sigma,\varphi)(t)$ 有

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t,x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_h), t \geqslant \sigma$;

(2) $V'_{(2.3.1)}(t,x_t) \leqslant -W_4(|x(t)|) - |W'_{(2.3.1)}(|x(t)|)|, t \geqslant \sigma$;

(3) 存在常数 $l' > l$, 使得 $2W(r) - W_3(l'r)$ 是楔函数,

则 (2.3.1) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

证明　先证 (2.3.1) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的. 对任意 $(\sigma,\varphi) \in \Omega$, $t \geqslant \sigma$, 由已知条件有

$$\begin{aligned} W_1(|x(t)|) &\leqslant V(t,x_t) \leqslant V(\sigma,\varphi) \\ &\leqslant W_2(|\varphi(0)|) + W_3(|\varphi|_h) \leqslant W_2\left(\frac{|\varphi|_h}{l}\right) + W_3(|\varphi|_h). \end{aligned}$$

由此得

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant W_1^{-1}\left(W_2\left(\frac{|\varphi|_h}{l}\right) + W_3(|\varphi|_h)\right), \quad t \geqslant \sigma,$$

故 (2.3.1) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的.

对任意 $H > 0$, 当 $r > 0$ 充分大时有 $(l' - l)r \geqslant H$, 此时有

$$2W(r) - W_3(H + lr) \geqslant 2W(r) - W_3((l'-l)r + lr) = 2W(r) - W_3(l'r).$$

因为 $\lim\limits_{r\to\infty}[2W(r) - W_3(l'r)] = \infty$, 故对任意 $H > 0$, 有

$$\lim_{r\to\infty}[2W(r) - W_3(H + lr)] = \infty.$$

由定理 2.2.2 知若 (1) 成立且

$$V'_{(2.3.1)}(t,x_t) \leqslant -W_4(|x(t)|) - |W'_{(2.3.1)}(|x(t)|)|$$

对 $|x(t)| \geqslant U$ 成立, 则存在 $T(H) > 0$, 只要 $|\varphi|_h \leqslant H$, $t \geqslant \sigma + T(H)$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)| < b$, 这里

$$b = W^{-1}[W_2(U) + W_2(M) + W_3(lM) + W(M)],$$

其中, $M > U$, 使得当 $r > M$ 时有

$$2W(r) > W_3(lr) + 3W_2(U) + 2W(U).$$

记 $W^*(r) = 2W(r) - W_3(lr)$. 由条件 (3) 知 $W^*(r)$ 是楔函数. 取

$$a = {W^*}^{-1}(3W_2(U) + 3W(U)),$$

则当 $r > M$ 时有

$$2W(r) - W_3(lr) = W^*(r) > W^*(a) = 3W_2(U) + 3W(U) > 3W_2(U) + 2W(U).$$

故可取 $M = a$.

由条件 (2) 知 $U > 0$ 可取得任意小. 当 $U \to 0$ 时, 易见 $M \to 0$, 从而 $b \to 0$. 而对每一个充分小的 $b > 0$ 都存在 $T(H) > 0$, 只要 $|\varphi|_h \leqslant H$, $t \geqslant \sigma + T(H)$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant b$. 这就证明了方程 (2.3.1) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的. ∎

微分方程解的稳定性研究中另一个重要问题是考虑其反问题, 即研究解稳定的必要条件, 建立解稳定的充分必要条件[180]. 1994 年, 林发兴[109] 建立了常微分方程解一致稳定和一致渐近稳定的充要条件, 并证明了在满足 Lipschitz 条件下, 解的一致渐近稳定性蕴含了有界解的存在性, 在此基础上讨论了概周期常微分方程的概周期解的存在性问题; 迪申加卜和王克[39] 将文献 [109] 的结果推广到了具有无限时滞的 RFDE, 在文献 [40] 中对于具有有限时滞的 RFDE 也得到了类似的结果. Fan 等[44] 和迪申加卜等[38] 分别对具有有限时滞和无限时滞的中立型泛函微分方程 (NFDE) 考虑了相同的问题.

下面介绍文献 [39] 的工作.

考虑具有无限时滞的 RFDE

$$x' = f(t, x_t), \tag{2.3.6}$$

其中, $f(t,\varphi)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$ 上连续. 在下面的讨论中, 假设对任意的 $(t,\varphi),(t,\psi) \in \mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$, 有

$$|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| \leqslant K|\varphi - \psi|_h, \quad |f(t,0)| \leqslant M, \tag{2.3.7}$$

其中, K, M 都是正常数. 容易证明, 上述条件可以保证解的存在唯一性及解对初始条件的连续依赖性.

定义 2.3.6　如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对一切 $(t_0,\varphi),(t_0,\psi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h$, 当 $|\varphi - \psi|_h < \delta$ 时, 对一切 $t \geqslant t_0$, 有 $|x_t(t_0,\varphi) - x_t(t_0,\psi)|_h < \varepsilon$, 则称 (2.3.6) 的解是 h 一致稳定的.

定义 2.3.7　如果 (2.3.6) 的解是 h 一致稳定的, 而且存在 $\delta_0 > 0$, 对于任给 $\varepsilon > 0$, 总有 $T = T(\varepsilon) > 0$, 当 $|\varphi - \psi|_h < \delta_0, t \geqslant t_0 + T$ 时, 有

$$|x_t(t_0,\varphi) - x_t(t_0,\psi)|_h < \varepsilon,$$

则称 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的.

定义 2.3.8　如果 $W : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 连续且当 $x > 0$ 时,$W(x) > 0, W(0) = 0$, 则称 $W(x)$ 为正定函数.

定义 2.3.9　如果 $V : \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h \times \mathscr{C}_h \to \mathbb{R}$ 连续且存在正定函数 $W(x)$, 使得对任意 $t \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \mathscr{C}_h$ 有 $V(t,\varphi,\psi) \geqslant W(|\varphi - \psi|_h)$, 则称 $V(t,\varphi,\psi)$ 为正规泛函.

定义 2.3.10　如果 $V : \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h \times \mathscr{C}_h \to \mathbb{R}$ 连续且存在正定函数 $W(x)$, 使得对任意 $t \in \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \mathscr{C}_h$ 有 $|V(t,\varphi,\psi)| \leqslant W(|\varphi - \psi|_h)$, 则称 $V(t,\varphi,\psi)$ 为可控泛函.

引理 2.3.1　$V(t,\varphi,\psi)$ 为正规泛函的充要条件是对于任一有界集 $D \subset \mathscr{C}_h$ 及任意 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\varphi - \psi \in D, |\varphi - \psi|_h \geqslant \varepsilon$ 时, 有 $V(t,\varphi,\psi) \geqslant \delta, t \in \mathbb{R}$.

证明　先证必要性. 因为 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函, 所以存在正定函数 $W(x)$, 使得 $V(t,\varphi,\psi) \geqslant W(|\varphi - \psi|_h)$.

采用反证法. 若不然, 存在有界集 D 以及 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, 总有 $\varphi_n - \psi_n \in D$, $|\varphi_n - \psi_n|_h \geqslant \varepsilon_0$ 及正项数列 $\{t_n\}$, 使得 $V(t_n,\varphi_n,\psi_n) < \delta_n$, 所以 $W(|\varphi_n - \psi_n|_h) < \delta_n$. 不失一般性, 设 $\{\alpha_n\} = \{|\varphi_n - \psi_n|_h\}$ 收敛 (否则可以取它的子列), 即存在 $x_0 \in \mathbb{R}^+$ 使得当 $n \to +\infty$ 时, $\alpha_n = |\varphi_n - \psi_n|_h \to x_0 \in \mathbb{R}^+$. 由 $W(x)$ 的连续性有 $W(x_0) = 0$, 从而 $x_0 = 0$. 但 $|\varphi_n - \psi_n|_h \geqslant \varepsilon_0$, 因此 $x_0 \geqslant \varepsilon_0$, 矛盾! 必要性证毕.

下面证明充分性. 选取正项数列 $\{\varepsilon_n\}$ 满足 $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ 且当 $n \to +\infty$ 时, $\varepsilon_n \to 0$. 对每个 ε_n, 存在 $\delta_n > 0$, 使得当 $\varphi - \psi \in D$, $|\varphi - \psi|_h \geqslant \varepsilon_n$ 时, 对一切 $t \in \mathbb{R}^+$, $V(t,\varphi,\psi) \geqslant \delta_n$. 不失一般性, 可取 $\delta_{n+1} < \delta_n$ 且当 $n \to +\infty$ 时 $\delta_n \to 0$(事实上, 取 $\bar{\delta}_n := \min\left\{\dfrac{\delta_{n-1}}{2}, \delta_n\right\}$ 代替 δ_n 即可). 作 $W(x)$ 如下:

$$\begin{aligned}
&W(0) = 0,\\
&W(x) = \delta_{i+1} + \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i}(x - \varepsilon_i), \quad x \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}].
\end{aligned}$$

显然,$W(x)$ 是正定连续函数且 $V(t,\varphi,\psi) \geqslant W(|\varphi - \psi|_h)$, 即 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函.

■

引理 2.3.2　$V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $|\varphi - \psi|_h < \delta$ 时, 对一切 $t \in \mathbb{R}^+$, $|V(t,\varphi,\psi)| \leqslant \varepsilon$.

证明 先证明必要性. 由于 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函, 故存在正定函数 $W(x)$, 使得

$$|V(t,\varphi,\psi)| \leqslant W(|\varphi-\psi|_h), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

因为 $W(0)=0$ 且 $W(x)$ 连续, 从而

$$\lim_{|\varphi-\psi|_h \to 0} W(|\varphi-\psi|_h) = 0,$$

即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $|\varphi-\psi|_h<\delta$ 时, $W(|\varphi-\psi|_h)\leqslant\varepsilon$, 所以 $|V(t,\varphi,\psi)|\leqslant\varepsilon,\ t\in\mathbb{R}^+$.

下面证明充分性. 选取正项数列 $\{\varepsilon_n\}$ 满足 $\varepsilon_{n+1}<\varepsilon_n$, 且当 $n\to+\infty$ 时, $\varepsilon_n\to 0$. 对每个 ε_n, 存在 $\delta_n>0$, 使得当 $\varphi-\psi\in D$, $|\varphi-\psi|_h\leqslant\delta_n$ 时, 对一切 $t\in\mathbb{R}^+$, $|V(t,\varphi,\psi)|\leqslant\varepsilon_n$. 不失一般性, 可取 $\delta_{n+1}<\delta_n$ 且当 $n\to+\infty$ 时 $\delta_n\to 0$. 作 $W(x)$ 如下:

$$W(0)=0,$$
$$W(x)=\varepsilon_i+\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}{\delta_i-\delta_{i+1}}(x-\delta_{i+1}), \quad x\in[\delta_{i+1},\delta_i].$$

显然,$W(x)$ 是正定连续函数且 $|V(t,\varphi,\psi)|\leqslant W(|\varphi-\psi|_h),t\in\mathbb{R}^+$, 即 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函. ∎

定理 2.3.2 *方程 (2.3.6) 的解是 h 一致稳定的充要条件是: 存在正规、可控泛函 $V(t,\varphi,\psi)$ 使得对任意 $t_0\in\mathbb{R}^+$ 和 $\varphi,\psi\in\mathscr{C}_h$, $V(t,x_t(t_0,\varphi),x_t(t_0,\psi))$ 关于 t 是单调不增的.*

证明 先证明必要性. 考虑泛函

$$V(t,\varphi,\psi)=\inf_{0\leqslant\tau\leqslant t}|x_\tau(t,\varphi)-x_\tau(t,\psi)|_h.$$

显然, $|V(t,\varphi,\psi)|\leqslant|\varphi-\psi|_h$, 即 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函. 由于 (2.3.6) 的解是 h 一致稳定的, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $|\varphi-\psi|_h<\delta$ 时, 对一切 $t\geqslant\tau, |x_t(\tau,\varphi)-x_t(\tau,\psi)|_h<\varepsilon$.

现证当 $|\varphi-\psi|_h\geqslant\varepsilon$ 时, 对一切 $t\geqslant\tau, |x_\tau(t,\varphi)-x_\tau(t,\psi)|_h\geqslant\delta$. 若不然, 存在 $\varphi_0,\psi_0\in\mathscr{C}_h, |\varphi_0-\psi_0|_h\geqslant\varepsilon$ 及 $t_0\geqslant\tau_0$, 使得 $|x_{\tau_0}(t_0,\varphi_0)-x_{\tau_0}(t_0,\psi_0)|_h<\delta$. 取 $\overline{\varphi}=x_{\tau_0}(t_0,\varphi_0),\overline{\psi}=x_{\tau_0}(t_0,\psi_0)$, 则 $\overline{\varphi},\overline{\psi}\in\mathscr{C}_h$ 且 $|\overline{\varphi}-\overline{\psi}|_h<\delta$, 因此由解的 h 一致稳定性, 对一切 $t\geqslant\tau, |x_t(\tau,\overline{\varphi})-x_t(\tau,\overline{\psi})|_h<\varepsilon$. 特别取 $t=t_0,\tau=\tau_0$, 就有

$$|x_{t_0}(\tau_0,x_{\tau_0}(t_0,\varphi_0))-x_{t_0}(\tau_0,x_{\tau_0}(t_0,\psi_0))|_h\leqslant\varepsilon,$$

即 $|\varphi_0-\psi_0|<\varepsilon$, 这是个矛盾. 所以对一切 $t\geqslant\tau, |x_\tau(t,\varphi)-x_\tau(t,\psi)|_h\geqslant\delta$, 所以 $V(t,\varphi,\psi)\geqslant\delta$ 对一切 $t\in\mathbb{R}^+$ 成立. 由引理 2.3.1 的充分性知, $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛

函. 任取 $t_1 < t_2, t_0 \in \mathbb{R}^+, \varphi, \psi \in \mathscr{C}_h$,

$$\begin{aligned}V(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi), x_{t_1}(t_0,\psi)) &= \inf_{0\leqslant\tau\leqslant t_1} |x_\tau(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)) - x_\tau(t_1, x_{t_1}(t_0,\psi))|_h \\ &= \inf_{0\leqslant\tau\leqslant t_1} |x_\tau(t_0,\varphi) - x_\tau(t_0,\psi)|_h \\ &\geqslant \inf_{0\leqslant\tau\leqslant t_2} |x_\tau(t_0,\varphi) - x_\tau(t_0,\psi)|_h \\ &= \inf_{0\leqslant\tau\leqslant t_2} |x_\tau(t_2, x_{t_2}(t_0,\varphi)) - x_\tau(t_2, x_{t_2}(t_0,\psi))|_h \\ &= V(t_2, x_{t_2}(t_0,\varphi), x_{t_2}(t_0,\psi)).\end{aligned}$$

下面证明充分性. 用反证法. 如果 (2.3.6) 的解不是 h 一致稳定的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任意 $\delta_n = \varepsilon_0/n$, 总有 $\varphi_n, \psi_n \in \mathscr{C}_h, t_n, \tau_n \in \mathbb{R}^+, t_n \geqslant \tau_n$, 使得 $|\varphi_n - \psi_n|_h < \delta_n$. 但 $|x_{t_n}(\tau_n,\varphi_n) - x_{t_n}(\tau_n,\psi_n)|_h \geqslant \varepsilon_0$, 由介值定理, 可取 $\bar{t}_n \in [\tau_n, t_n]$, 使得 $|x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\varphi_n) - x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\psi_n)|_h = \varepsilon_0$. 令 $D = \{\varphi \in \mathscr{C}_h, |\varphi|_h = \varepsilon_0\}$, 则 $x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\varphi_n) - x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\psi_n) \in D$. 由于 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函, 从而对于上述 $\varepsilon_0 > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得对一切 $t \in \mathbb{R}^+$ 均有 $V(t, x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\varphi_n), x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\psi_n)) \geqslant \delta_0$. 又因为 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函, 由引理 2.3.2 的必要性, 对于上述 δ_0, 存在 $\eta_0 > 0$, 当 $|\varphi - \psi|_h < \eta_0$, 对一切 $t \in \mathbb{R}^+$ 有 $V(t,\varphi,\psi) < \delta_0/2$. 而存在 n, 使得 $|\varphi_n - \psi_n|_h < \delta_n < \eta_0$, 所以对一切 $t \in \mathbb{R}^+$ 均有 $V(t,\varphi_n,\psi_n) < \delta_0/2$. 取 $t = \tau_n$, 就有 $V(\tau_n,\varphi_n,\psi_n) < \delta_0/2$. 由已知 $V(t, x_t(\tau_n,\varphi_n), x_t(\tau_n,\psi_n))$ 关于 t 单调不增, 从而

$$V(\tau_n, x_{\tau_n}(\tau_n,\varphi_n), x_{\tau_n}(\tau_n,\psi_n)) \geqslant V(\bar{t}_n, x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\varphi_n), x_{\bar{t}_n}(\tau_n,\psi_n)),$$

所以 $\delta_0/2 \geqslant \delta_0$, 这是一个矛盾, 所以 (2.3.6) 的解是 h 一致稳定的. ■

如果 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的, 令

$$V(t,\varphi,\psi) = \sup_{\tau\geqslant 0}\left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \frac{1+2\tau}{1+\tau}\right). \tag{2.3.8}$$

在此假设下, 有如下结果:

引理 2.3.3　$|\varphi - \psi|_h \leqslant V(t,\varphi,\psi)$, 即 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函.

证明

$$\begin{aligned}V(t,\varphi,\psi) &= \sup_{\tau\geqslant 0}\left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \frac{1+2\tau}{1+\tau}\right) \\ &\geqslant |x_t(t,\varphi) - x_t(t,\psi)|_h = |\varphi - \psi|_h.\end{aligned}$$

引理 2.3.4　$V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函.

证明　由于 (2.3.6) 的解是 h 一致稳定的, 因此对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $|\varphi - \psi|_h < \delta$ 时, 对一切 $\tau \geqslant 0, |x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h < \varepsilon/4$, 从而

$$V(t,\varphi,\psi) = \sup_{\tau\geqslant 0}\left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \frac{1+2\tau}{1+\tau}\right) \leqslant \sup_{\tau\geqslant 0}\left(\frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{1+2\tau}{1+\tau}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由引理 2.3.2 可知 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函. ■

引理 2.3.5 对于满足 $0<\varepsilon<\dfrac{\delta_0}{4}$ 的 ε 及充分小的 $\delta\geqslant 0$，当 $|\varphi-\psi|_h\geqslant 2\varepsilon$ 时,

$$V(t+\delta,x_{t+\delta}(t,\varphi),x_{t+\delta}(t,\psi))\leqslant \sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta}\right).$$

特别, 当 $\delta=0$ 时有

$$V(t,\varphi,\psi)=\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau}\right),$$

其中, δ_0 和 $T=T(\varepsilon)$ 与定义 2.3.7 相同.

证明 由于 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的, 从而存在 $\delta_0>0$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $T=T(\varepsilon)>0$, 当 $|\overline{\varphi}-\overline{\psi}|_h<\delta_0$ 时,

$$|x_{t+\tau}(t,\overline{\varphi})-x_{t+\tau}(t,\overline{\psi})|_h<\varepsilon,\quad \tau\geqslant T.$$

若 $|\varphi-\psi|_h<\delta_0$, 则当 $\tau>T$ 时,

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta}<2\varepsilon\leqslant|\varphi-\psi|_h.$$

若 $|\varphi-\psi|_h\geqslant\delta_0$, 则存在自然数 m, 使得 $m\leqslant\dfrac{|\varphi-\psi|_h}{\delta_0}<m+1$, 取

$$\varphi_i=\varphi+\frac{i}{m+1}(\psi-\varphi),\quad i=0,1,2,\cdots,m.$$

由于 $0<\varepsilon\leqslant\dfrac{\delta_0}{4}$, 所以

$$2\varepsilon\leqslant|\varphi-\varphi_1|_h,|\varphi_1-\varphi_2|_h,\cdots,|\varphi_m-\psi|_h<\delta_0.$$

因此当 $\tau\geqslant T$ 时,

$$\begin{aligned}&|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta}\\ \leqslant&\,2|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\\ \leqslant&\,2(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\varphi_1)|_h+|x_{t+\tau}(t,\varphi_1)-x_{t+\tau}(t,\varphi_2)|_h\\ &+\cdots+|x_{t+\tau}(t,\varphi_m)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h)\\ <&\,2(m+1)\varepsilon<|\varphi-\varphi_1|_h+|\varphi_1-\varphi_2|_h+\cdots+|\varphi_m-\psi|_h=|\varphi-\psi|_h,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&V(t+\delta,x_{t+\delta}(t,\varphi),x_{t+\delta}(t,\psi))\\ =&\sup_{\tau\geqslant0}\left(|x_{t+\delta+\tau}(t+\delta,x_{t+\delta}(t,\varphi))-x_{t+\delta+\tau}(t+\delta,x_{t+\delta}(t,\psi))|_h\cdot\frac{1+2\tau}{1+\tau}\right)\\ =&\sup_{\tau\geqslant0}\left(|x_{t+\delta+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\delta+\tau}(t,\psi)|_h\cdot\frac{1+2\tau}{1+\tau}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\tau \geqslant \delta} \left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \cdot \frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta} \right) \\
&\leqslant \sup_{\tau \geqslant 0} \left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \cdot \frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta} \right) \\
&= \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \cdot \frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta} \right). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

对于 $V : \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h \times \mathscr{C}_h \to \mathbb{R}$ 连续, 记

$$
V'_{(2.3.6)} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} [V(t+\delta, x_{t+\delta}(t,\varphi), x_{t+\delta}(t,\psi)) - V(t,\varphi,\psi)],
$$

则有如下定理:

定理 2.3.3 *方程 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的充要条件是: 存在正规可控泛函 $V(t,\varphi,\psi)$, 使得 $-V'_{(2.3.6)}(t,\varphi,\psi)$ 也是正规泛函.*

证明 先证必要性. 由式 (2.3.8) 以及引理 2.3.3, 引理 2.3.4 知 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规可控泛函. 只需证明 $-V'_{(2.3.6)}(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函.

任给 $\varepsilon > 0$ 以及 $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_h, |\varphi - \psi|_h \geqslant 2\varepsilon$, 由引理 2.3.5 可得

$$
\begin{aligned}
&V(t+\delta, x_{t+\delta}(t,\varphi), x_{t+\delta}(t,\psi)) \\
&\leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \cdot \frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta} \right) \\
&= \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \cdot \frac{1+2\tau}{1+\tau} \left(1 - \frac{\delta}{(1+2\tau)(1+\tau-\delta)} \right) \right) \\
&\leqslant \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant T} \left(|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h \cdot \frac{1+2\tau}{1+\tau} \left(1 - \frac{\delta}{(1+2T)^2} \right) \right) \\
&\leqslant V(t,\varphi,\psi) \left(1 - \frac{\delta}{(1+2T)^2} \right),
\end{aligned}
$$

其中, $T = T(\varepsilon)$ 与定义 2.3.10 相同. 因此由引理 2.3.3 得到

$$
-V'_{(2.3.6)}(t,\varphi,\psi) \geqslant \frac{V(t,\varphi,\psi)}{(1+2T)^2} \geqslant \frac{|\varphi-\psi|_h}{(1+2T)^2} \geqslant \frac{2\varepsilon}{(1+2T)^2},
$$

取 $\delta_1 = \dfrac{2\varepsilon}{(1+2T)^2}$, 从而当 $|\varphi - \psi|_h \geqslant 2\varepsilon$ 时, $-V'_{(2.3.6)}(t,\varphi,\psi) \geqslant \delta_1$. 由引理 2.3.1 知 $-V'_{(2.3.6)}(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函.

下面证明充分性. 由定理 2.3.2 知 (2.3.6) 的解是 h 一致稳定的, 从而存在 $\delta_0 > 0$, 当 $|\varphi - \psi|_h < \delta_0$ 时 $|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h < 1, \tau \geqslant 0$. 只需证明, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T = T(\varepsilon) > 0$, 当 $\tau \geqslant T$ 时, 对一切 $t \in \mathbb{R}^+, \varphi, \psi \in \mathscr{C}_h$. 只要 $|\varphi - \psi|_h < \delta_0$ 就有 $|x_{t+\tau}(t,\varphi) - x_{t+\tau}(t,\psi)|_h < \varepsilon$. 若不然, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对于任意数列 $\{T_m\}$: 当 $m \to \infty$ 时 $T_m \to +\infty$, 有 $\varphi_m, \psi_m \in \mathscr{C}_h$ 及 $t_m \in \mathbb{R}^+$, 使 $|\varphi_m - \psi_m|_h < \delta_0$, 但是 $|x_{t_m+T_m}(t_m,\varphi_m) - x_{t_m+T_m}(t_m,\psi_m)|_h \geqslant \varepsilon_0$.

令 $D=\{\varphi\in\mathscr{C}_h|\ |\varphi|_h\leqslant 1\}$, 由于 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函, 由引理 2.3.1 的必要性, 存在 $I_0>0$, 使得

$$V(t_m+T_m,x_{t_m+T_m}(t_m,\varphi_m),x_{t_m+T_m}(t_m,\psi_m))\geqslant I_0.$$

又因为 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函, 由引理 2.3.2 的必要性, 存在 L_0, 使得

$$|x_{t_m+\tau}(t_m,\varphi_m)-x_{t_m+\tau}(t_m,\psi_m)|_h\geqslant L_0.$$

又因为 $-V'_{(2.3.6)}(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函, 由引理 2.3.1 的必要性, 存在 $q_0>0$, 使得

$$-V'_{(2.3.6)}(t_m+\tau,x_{t_m+\tau}(t_m,\varphi_m),x_{t_m+\tau}(t_m,\psi_m))\geqslant q_0.$$

由比较定理,

$$V(t_m+T_m,x_{t_m+T_m}(t_m,\varphi_m),x_{t_m+T_m}(t_m,\psi_m))\leqslant -q_0T_m+V(t_m,\varphi_m,\psi_m),$$

而 $|\varphi_m-\psi_m|_h\leqslant\delta_0$ 且 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函, 从而 $V(t_m,\varphi_m,\psi_m)$ 有界, 所以

$$\lim_{m\to+\infty}V(t_m+T_m,x_{t_m+T_m}(t_m,\varphi_m),x_{t_m+T_m}(t_m,\psi_m))=-\infty.$$

这与 $V(t,\varphi,\psi)$ 是正规泛函矛盾, 因此 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的. ■

引理 2.3.6 如果 (2.3.7) 成立, 则对于任意 $\tau,t\in\mathbb{R}^+,\varphi\in\mathscr{C}_h$ 有

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)|_h\leqslant(3|\varphi|_h+2lM\tau)\cdot(2lK\tau).$$

证明 任取 $r\in[0,\tau]$, 由于

$$\begin{aligned}x(t+r+\theta,t,\varphi)&=\varphi(0)+\int_t^{t+r+\theta}f(s,x_s(t,\varphi))\mathrm{d}s\\&=\varphi(0)+\int_0^{r+\theta}f(s+t,x_{s+t}(t,\varphi))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

又 $\mathscr{C}_h$ 空间满足一般相空间假设 (B_4), 故

$$\begin{aligned}x(t+r+\theta,t,\varphi)&\leqslant\frac{1}{l}|\varphi|_h+\int_0^{r+\theta}|f(s+t,x_{s+t}(t,\varphi))|\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{l}|\varphi|_h+\int_0^{r+\theta}|f(s+t,0)|\mathrm{d}s\\&\quad+\int_0^{r+\theta}|f(s+t,x_{s+t}(t,\varphi))-f(s+t,0)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{l}|\varphi|_h+M\cdot(r+\theta)+K\int_0^{r+\theta}|x_{s+t}(t,\varphi)|_h\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由 $\mathscr{C}_h$ 空间满足一般相空间假设 $(B_2),(B_3)$ 可得

$$
\begin{aligned}
|x_{t+r}(t,\varphi)|_h &\leqslant |\tau^{\beta}(\varphi)|_{\beta}+2l\sup_{-\beta\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t+r+\theta,t,\varphi)| \\
&\leqslant |\varphi|_h+2l\sup_{-\beta\leqslant\theta\leqslant 0}\left[\frac{1}{l}|\varphi|_h+M\cdot(r+\theta)+K\int_0^{r+\theta}|x_{s+t}(t,\varphi)|_h\mathrm{d}s\right] \\
(\text{取}\beta=r)\quad &\leqslant |\varphi|_h+2|\varphi|_h+2lK\int_0^{r}|x_{s+t}(t,\varphi)|_h\mathrm{d}s+2lMr \\
&=3|\varphi|_h+2lMr+2lK\int_0^{r}|x_{s+t}(t,\varphi)|_h\mathrm{d}s \\
&\leqslant 3|\varphi|_h+2lM\tau+2lK\int_0^{r}|x_{s+t}(t,\varphi)|_h\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由 Bellman 不等式得到

$$|x_{t+r}(t,\varphi)|_h\leqslant(3|\varphi|_h+2lM\tau)\exp(2lKr).$$

取 $r=\tau$, 则

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)|_h\leqslant(3|\varphi|_h+2lM\tau)\exp(2lK\tau).$$

证毕. ∎

引理 2.3.7 如果 (2.3.7) 成立, 则对任意 $t,\tau\in\mathbb{R}^+$ 及 $\varphi,\psi\in\mathscr{C}_h$ 有

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\leqslant 3|\varphi-\psi|_h\cdot\exp(2lK\tau).$$

证明 因为

$$x(t+\tau+\theta,t,\varphi)=\varphi(0)+\int_0^{\tau+\theta}f(s+t,x_{s+t}(t,\varphi))\mathrm{d}s,$$

$$x(t+\tau+\theta,t,\psi)=\psi(0)+\int_0^{\tau+\theta}f(s+t,x_{s+t}(t,\psi))\mathrm{d}s,$$

所以由 $\mathscr{C}_h$ 空间满足一般相空间假设 (B_4) 可得

$$|x(t+\tau+\theta,t,\varphi)-x(t+\tau+\theta,t,\psi)|\leqslant\frac{1}{l}|\varphi-\psi|_h+K\int_0^{\tau+\theta}|x_{s+t}(t,\varphi)-x_{s+t}(t,\psi)|_h\mathrm{d}s.$$

由 $\mathscr{C}_h$ 空间满足一般相空间假设 $(B_2),(B_3)$ 可得

$$
\begin{aligned}
&|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\\
&\leqslant|\tau^\beta(\varphi-\psi)|_\beta+2l\sup_{-\beta\leqslant\theta\leqslant 0}|x(t+\tau+\theta,t,\varphi)-x(t+\tau+\theta,t,\psi)|\\
&\leqslant|\varphi-\psi|_h+2l\sup_{-\beta\leqslant\theta\leqslant 0}\left[\frac{1}{l}|\varphi-\psi|_h+K\int_0^{\tau+\theta}|x_{s+t}(t,\varphi)-x_{s+t}(t,\psi)|_h\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{取}\beta=\tau)&\leqslant|\varphi-\psi|_h+2|\varphi-\psi|_h+2lK\int_0^{\tau}|x_{s+t}(t,\varphi)-x_{s+t}(t,\psi)|_h\mathrm{d}s\\
&=3|\varphi-\psi|_h+2lK\int_0^{\tau}|x_{s+t}(t,\varphi)-x_{s+t}(t,\psi)|_h\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由 Bellman 不等式得到

$$|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi)|_h\leqslant 3|\varphi-\psi|_h\cdot\exp(2lK\tau).$$ ∎

引理 2.3.8 如果 (2.3.7) 成立且 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的, 则对于任意 $t\in\mathbb{R}^+,\varphi,\psi_1,\psi_2\in\mathscr{C}_h$ 以及 $\varepsilon\geqslant 0,|\varphi-\psi_1|\geqslant 2\varepsilon,|\varphi-\psi_2|\geqslant 2\varepsilon$ 有

$$|V(t,\varphi,\psi_1)-V(t,\varphi,\psi_2)|\leqslant 6|\psi_1-\psi_2|_h\cdot\exp(2lKT).$$

证明 由引理 2.3.5 和引理 2.3.7,

$$
\begin{aligned}
|V(t,\varphi,\psi_1)-V(t,\varphi,\psi_2)|=&\left|\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi_1)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau}\right)\right.\\
&\left.-\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(t,\varphi)-x_{t+\tau}(t,\psi_2)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau}\right)\right|\\
\leqslant&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(t,\psi_1)-x_{t+\tau}(t,\psi_2)|_h\frac{1+2\tau}{1+\tau}\right)\\
=&6|\psi_1-\psi_2|_h\cdot\exp(2lKT).
\end{aligned}
$$ ∎

引理 2.3.9 如果 (2.3.7) 成立且 $x_t(0,\varphi)$ 在 $[0,+\infty)$ 上无界, 则存在数列 $\{\tau_m\},\{t_m\}$ 满足 $\tau_m\leqslant t_m$ 且当 $m\to\infty$ 时 $t_m-\tau_m\to+\infty,|x_{\tau_m}(0,\varphi)|_h=|\varphi|_h$; 当 $t\in[\tau_m,t_m]$ 时 $|x_t(0,\varphi)|_h\geqslant|\varphi|_h$, 且当 $m\to\infty$ 时, $|x_{t_m}(0,\varphi)|_h\to\infty$.

证明 因为 $x_t(0,\varphi)$ 在 $[0,+\infty)$ 上无界, 从而存在正项数列 $\{t_m\}$, 使得当 $m\to+\infty$ 时 $t_m\to+\infty$ 且 $|\varphi|_h\leqslant|x_{t_m}(0,\varphi)|_h\to+\infty$. 对于每个 m, 令 $G_m=\{\tau\in[0,t_m]\,|\,|x_\tau(0,\varphi)|_h=|\varphi|_h\}$, 显然 G_m 有界、非空, 从而有上确界. 设 $\tau_m=\sup G_m$, 下面证明 $\{\tau_m\},\{t_m\}$ 满足要求. 由于当 $m\to\infty$ 时 $|x_{t_m}(0,\varphi)|_h\to+\infty$, 由 τ_m 的选择以及 $x_t(0,\varphi)$ 关于 t 的连续性, $|x_{\tau_m}(0,\varphi)|_h=|\varphi|_h$, 且当 $t\in[\tau_m,t_m]$ 时 $|x_t(0,\varphi)|_h\geqslant|\varphi|_h$. 剩下的要证明当 $m\to\infty$ 时 $t_m-\tau_m\to+\infty$. 用反证法. 若不然, 存在 $\{t_m-\tau_m\}$ 的子列 $\{t_{m_k}-\tau_{m_k}\}$ 有界, 设 $t_{m_k}-\tau_{m_k}\leqslant L$, 由引理 2.3.6,

$$\begin{aligned}|x_{t_{m_k}}(0,\varphi)|_h &= |x_{t_{m_k}}(\tau_{m_k}, x_{\tau_{m_k}}(0,\varphi))|_h \\ &\leqslant (3|x_{\tau_{m_k}}(0,\varphi)|_h + 2lM(t_{m_k}-\tau_{m_k}))\cdot\exp(2lK(t_{m_k}-\tau_{m_k})) \\ &\leqslant (3|\varphi|_h + 2lML)\exp(2lKL).\end{aligned}$$

这与当 $k\to\infty$ 时, $|x_{t_{m_k}}(0,\varphi)|_h\to+\infty$ 相矛盾, 所以当 $m\to\infty$ 时 $t_m-\tau_m\to+\infty$.

∎

定理 2.3.4 如果 (2.3.7) 成立且 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的, 那么 (2.3.6) 的解 $x_t(0,\varphi)$(对任意 $\varphi\in\mathscr{C}_h$) 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

证明 取 $\varphi_0\in\mathscr{C}_h$, 满足 $|\varphi_0|_h=\delta_0$, 其中, δ_0 与定义 2.3.7 相同. 先证 $x_t(0,\varphi_0)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 若不然, 由引理 2.3.9 , 存在数列 $\{\tau_m\},\{t_m\}$ 满足 $\tau_m<t_m$ 且当 $m\to\infty$ 时 $t_m-\tau_m\to+\infty$, 而 $|x_{\tau_m}(0,\varphi_0)|_h=|\varphi_0|_h=\delta_0$, $|x_{t_m}(0,\varphi_0)|_h\to\infty$, 且当 $t\in[\tau_m,t_m]$ 时 $|x_t(0,\varphi_0)|_h\geqslant\delta_0$. 取 δ 充分小, 使 $2lM\cdot\delta\cdot\exp(2lK\delta)\leqslant\dfrac{\delta_0}{2}$, 任取 $t,t+\delta\in[\tau_m,t_m]$, 则 $|x_{t+\delta}(0,\varphi_0)|_h\geqslant\delta_0$. 而由引理 2.3.6,

$$|x_{t+\delta}(t,0)|_h\leqslant 2lM\delta\cdot\exp(2lK\delta)\leqslant\frac{\delta_0}{2},$$

所以 $|x_{t+\delta}(0,\varphi_0)-x_{t+\delta}(t,0)|_h\geqslant\dfrac{\delta_0}{2}$. 取 $\varepsilon=\dfrac{\delta_0}{4}$, 由引理 2.3.8 得到

$$|V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0)-V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))|\leqslant 6|x_{t+\delta}(t,0)|_h\cdot\exp(2lKT),$$

其中, $T=T\left(\dfrac{\delta_0}{4}\right)$ 随 δ_0 确定而确定, 由上式及引理 2.3.5, 当 $t,t+\delta\in[\tau_m,t_m]$ 时有

$$\begin{aligned}&V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0)\\ =&V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))\\ &+[V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0)-V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))]\\ \leqslant&V(t+\delta,x_{t+\delta}(0,\varphi_0),x_{t+\delta}(t,0))+6|x_{t+\delta}(t,0)|_h\cdot\exp(2lKT)\\ =&V(t+\delta,x_{t+\delta}(t,x_t(0,\varphi_0)),x_{t+\delta}(t,0))+6|x_{t+\delta}(t,0)|_h\cdot\exp(2lKT)\\ \leqslant&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(t,x_t(0,\varphi_0))-x_{t+\tau}(t,0)|_h\cdot\frac{1+2(\tau-\delta)}{1+\tau-\delta}\right)\\ &+6|x_{t+\delta}(t,0)|_h\cdot\exp(2lKT)\\ =&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(t,x_t(0,\varphi_0))-x_{t+\tau}(t,0)|_h\cdot\frac{1+2\tau}{1+\tau}\left(1-\frac{\delta}{(1+2\tau)(1+\tau-\delta)}\right)\right)\\ &+6|x_{t+\delta}(t,0)|_h\cdot\exp(2lKT)\\ \leqslant&\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\left(|x_{t+\tau}(0,x_t(0,\varphi_0))-x_{t+\tau}(t,0)|_h\cdot\frac{1+2\tau}{1+\tau}\left(1-\frac{\delta}{(1+2T)^2}\right)\right)\\ &+6|x_{t+\delta}(t,0)|_h\cdot\exp(2lKT)\\ \leqslant&V(t,x_t(0,\varphi_0),0)\left(1-\frac{\delta}{(1+2T)^2}\right)+6|x_{t+\delta}(t,0)|_h\cdot\exp(2lKT).\end{aligned}$$

因为当 $t \in [\tau_m, t_m]$ 时,

$$\begin{aligned}
D_t V(t, x_t(0,\varphi_0), 0) &= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}[V(t+\delta, x_{t+\delta}(0,\varphi_0),0) - V(t, x_t(0,\varphi_0),0)] \\
&\leqslant -\frac{1}{(1+2T)^2} V(t, x_t(0,\varphi_0),0) \\
&\quad +6 \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta}|x_{t+\delta}(t,0)|_h \cdot \exp(2lKT) \\
&\leqslant -\frac{1}{(1+2T)^2} V(t, x_t(0,\varphi_0),0) \\
&\quad +6 \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1}{\delta} \cdot 2lM\delta \cdot \exp(2lK\delta)\cdot \exp(2lKT) \\
&= -\frac{1}{(1+2T)^2} V(t, x_t(0,\varphi_0),0) + 12lM \cdot \exp(2lKT).
\end{aligned}$$

从而当 $t \in [\tau_m, t_m]$ 时, 由比较定理得到

$$\begin{aligned}
&V(t, x_t(0,\varphi_0),0) \\
\leqslant\ & \exp\left(-\frac{t-\tau_m}{(1+2T)^2}\right)[V(\tau_m, x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0) - (1+2T)^2\cdot 12Ml \cdot \exp(2lKT)] \\
&+(1+2T)^2 \cdot 12Ml\cdot \exp(2lKT) \\
\leqslant\ & V(\tau_m, x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0) + (1+2T)^2\cdot 12Ml\cdot \exp(2lKT).
\end{aligned}$$

取 $t = t_m$ 得到

$$V(t_m, x_{t_m}(0,\varphi_0),0) \leqslant V(\tau_m, x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0) + (1+2T)^2\cdot 12Ml\cdot \exp(2lKT).$$

由引理 2.3.4 知 $V(t,\varphi,\psi)$ 是可控泛函且 $|x_{\tau_m}(0,\varphi_0)|_h = \delta_0$, 从而存在 L, 使得 $V(\tau_m, x_{\tau_m}(0,\varphi_0),0) \leqslant L$. 因此

$$V(t_m, x_{t_m}(0,\varphi_0),0) \leqslant L + (1+2T)^2\cdot 12Ml\cdot \exp(2lKT).$$

结合引理 2.3.3 得到

$$|x_{t_m}(0,\varphi_0)|_h \leqslant L + (1+2T)^2\cdot 12Ml\cdot \exp(2lKT).$$

这与当 $m\to\infty$ 时 $|x_{t_m}(0,\varphi_0)|_h \to +\infty$ 相矛盾, 从而 $x_t(0,\varphi_0)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上有界.

任取 $\varphi \in \mathscr{C}_h$, 可取 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m \in \mathscr{C}_h$, 使得

$$|\varphi_0 - \varphi_1|_h < \delta_0, \quad |\varphi_1-\varphi_2|_h < \delta_0, \quad \cdots, \quad |\varphi_m - \varphi|_h < \delta_0,$$

因此由 (2.3.6) 的解是 h 一致渐近稳定的定义, 当 $t\to+\infty$ 时,

$$|x_t(0,\varphi_0) - x_t(0,\varphi)|_h \leqslant |x_t(0,\varphi_0) - x_t(0,\varphi_1)|_h + \cdots + |x_t(0,\varphi_m) - x_t(0,\varphi)|_h \to 0,$$

所以 $x_t(0,\varphi)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上有界. 定理得证. ∎

2.4　利用 $\mathscr{C}_h$ 空间研究泛函微分方程的周期解

设 Ω 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$ 上的开集. 考虑方程

$$x' = f(t, x_t), \tag{2.4.1}$$

其中, $x\in\mathbb{R}^n$, $f(t,\varphi)$ 在 Ω 上连续, $f(t,\varphi)$ 对 φ 满足局部 Lipschitz 条件且存在 $\omega>0$, 使得 $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$, $t\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathscr{C}_h$.

在 1.6 节, 以具有衰减记忆的容许相空间为基础, 我们将 Yoshizawa 关于具有有限时滞的泛函微分方程的周期解存在性定理推广到具有无限时滞的泛函微分方程. 本节以 $\mathscr{C}_h$ 相空间为基础, 重新考虑此问题.

引理 2.4.1　对于任意常数 $c,a>0,L\geqslant 0$, 集合

$$S=\{\varphi\in\mathscr{C}_h|\ |\varphi|_h\leqslant c,\ |\varphi|\leqslant a,\ |\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L|\theta_1-\theta_2|,\ \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^-\}$$

是凸的和 $|\cdot|_h$ 紧致的.

证明　设序列 $\varphi_n\in S$, 则 $\{\varphi_n\}$ 在 $[-1,0]$ 上等度连续且一致有界. 由 Arzela-Ascoli 引理, 存在在 $[-1,0]$ 上一致收敛的子序列 $\{\varphi_n^1\}$, 收敛于某个连续函数 φ_0^1. 根据同样的理由,$\{\varphi_n^1\}$ 存在子序列 $\{\varphi_n^2\}$, 在 $[-2,0]$ 上一致收敛于某个连续函数 φ_0^2, 从而最后可得到 $\{\varphi_n\}$ 的子序列 $\{\varphi_n^n\}$, 它在每一个区间 $[-i,0](i=1,2,\cdots)$ 上都一致收敛于连续函数 $\varphi_0,\varphi_0\equiv\varphi_i$, $t\in[-i,0]$. 由引理 2.1.2, 有

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n-\varphi_0|_h=0.$$

易知 $\varphi_0\in S$. 于是 S 是 $|\cdot|_h$ 紧致的. S 的凸性容易证明. 引理证毕. ∎

定理 2.4.1　假设

(1) $f(t,\varphi)$ 是 t 的 ω 周期函数;

(2) 对任意 $\alpha>0$, 存在 $L(t,\alpha)>0$, 使得当 $|\varphi|_h\leqslant\alpha$ 时有

$$f(t,\varphi)\leqslant L(t,\alpha),$$

其中, $L(t,s)$ 是 t 的连续函数;

(3) 方程 (2.4.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界及 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的且界为 b, 则方程 (2.4.1) 存在 ω 周期解.

证明　令

$$S_0=\{\varphi\in\mathscr{C}_h|\ |\varphi|_h\leqslant(b+1)l,|\varphi|\leqslant N((b+2)l),|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L^*|\theta_1-\theta_2|\},$$
$$S_1=\{\varphi\in\mathscr{C}_h|\ |\varphi|_h<(b+2)l,|\varphi|\leqslant N((b+2)l),|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L^*|\theta_1-\theta_2|\},$$
$$S_2=\{\varphi\in\mathscr{C}_h|\ |\varphi|_h\leqslant lN((b+2)l),|\varphi|\leqslant N(lN((b+2)l)),|\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant L^*|\theta_1-\theta_2|$$

其中,

$$L^* = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} L(t, lN(b+2)l).$$

由解的 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界性, 当 $\varphi\in S_1$, $t\in\mathbb{R}$ 时, 有

$$|x(0,\varphi)(t)| \leqslant N((b+2)l)$$

及

$$|x_t(0,\varphi)|_h \leqslant lN((b+2)l). \tag{2.4.2}$$

同时, 当 $\varphi\in S_2$ 时, 由于

$$|x_\omega(0,\varphi)|_h \leqslant N(lN((b+2)l)) < \infty,$$

故有 $x_\omega(0,\varphi)\in\mathscr{C}_h$.

定义映射 $F: S_2\to\mathscr{C}_h$ 如下:

$$F(\varphi) = x_\omega(0,\varphi).$$

由 (2.4.2) 可知对任意正整数 j, 均有

$$F^j(S_1)\subset S_2.$$

由 $\mathscr{C}_h$–$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界性, 存在 $T>0$, 使得当 $\varphi\in S_1$ 及 $t\geqslant T$ 时有 $|x(0,\varphi)(t)|\leqslant b$.

取 $T_1 > T$, 则有

$$\begin{aligned}
|x_{T_1}(0,\varphi)|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_{T_1}(0,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&= \left(\int_{-\infty}^{-(T_1-T)} + \int_{-(T_1-T)}^{0}\right) h(s)|x_{T_1}(0,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant N((b+2)l)\int_{-\infty}^{-(T_1-T)} h(s)\mathrm{d}s + b\int_{-(T_1-T)}^{0} h(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

对充分大的 T_1 有

$$|x_{T_1}(0,\varphi)|_h \leqslant (b+1)l.$$

因此, 当 $j\omega > T_1$ 时有

$$F^j(S_1)\subset S_0.$$

引理 2.4.1 指出 S_0, S_2 是紧致的. 显然, S_1 相对于 S_2 是开的.

文献 [133] 指出映射 F 是连续的. 至此, 引理 1.6.2 的所有条件均已满足, 从而 F 在 S_0 中有不动点 φ^* 存在, 即

$$x_\omega(0,\varphi^*) = \varphi^*.$$

由 f 的周期性及解的唯一性可知解 $x = x(0,\varphi^*)(t)$ 是方程 (2.4.1) 的 ω 周期解. 定理证毕. ■

定义 2.4.1 *泛函 $V(t,\varphi):\mathbb{R}\times\mathscr{C}\to\mathbb{R}^+$ 称为是凸的, 假如对于任意 $B\geqslant 0$ 及任意 $t\in\mathbb{R}$, 集合 $\{\varphi\in\mathscr{C}|V(t,\varphi)\leqslant B\}$ 是凸的.*

定理 2.4.2 *假如*

(i) 存在 $\omega>0$, 使得对任意 $t\in\mathbb{R}$ 及任意 $\varphi\in\mathscr{C}$ 有 $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$;

(ii) 存在楔函数 $W(r)$ 及凸泛函 $V(t,\varphi):\mathbb{R}\times\mathscr{C}\to\mathbb{R}^+$, 使得

$$W(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi),\quad t\in\mathbb{R}^+,\ \varphi\in\mathscr{C}$$

且 $V(t,\varphi)$ 对 t 连续, 对任意 $H>0$,V 对满足 $|\varphi|\leqslant H$ 的 φ 按 $|\cdot|_h$ 连续;

(iii) 存在可微函数 $u(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, g 对第二变元满足局部 Lipschitz 条件以及 $t_0>-\infty$, 使得 $u(t_0+\omega)\leqslant u(t_0)$, $V(t_0,\varphi)\leqslant u(t_0)$ 以及 $u'(t)\geqslant g(t,u(t))$, 对 $t\in[t_0,t_0+\omega]$ 成立;

(iv) 当 $V(t,\varphi)\geqslant u(t)$ 时有

$$V'_{(2.4.1)}\leqslant g(t,V(t,\varphi));$$

(v) 对于满足 $W(|\varphi|)\leqslant u_0=\max\limits_{[t_0,t_0+\omega]}u(t)$ 的任何 $\varphi\in\mathscr{C}$ 有

$$V(t_0,\varphi)\leqslant V(t_0+\omega,\varphi),$$

(vi) 对任意 $H>0$,(2.4.1) 的解按 $|\cdot|_h$ 连续依赖于满足 $|\varphi|\leqslant H$ 的初始函数 φ, 则方程 (2.4.1) 存在以 ω 为周期的周期解.

证明　考虑集合

$$\begin{aligned}S=\{\varphi\in\mathscr{C}_h|\ &V(t_0,\varphi)\leqslant u(t_0),\ \ |\varphi(s_1)-\varphi(s_2)|\leqslant M|s_1-s_2|,\\ &s_1,s_2\in\mathbb{R}^-,W(|\varphi|)\leqslant u_0\},\end{aligned}$$

此处 $M=\sup\{|f(t,\varphi)|\ |0\leqslant t\leqslant\omega,\ W(|\varphi|)\leqslant u_0\}$. 因为 $\varphi\equiv 0\in S$, 故 S 非空. 因为 $W(|\varphi|)\leqslant u_0$, $|\varphi|\leqslant W^{-1}(u_0)$, 故在下面可以引用条件 (ii) 及 (vi).

我们将在 S 上应用 Schauder 不动点定理. 首先, 由 V 的凸性及 $W(r)$ 为楔函数, 容易证明 S 为 $\mathscr{C}_h$ 中的凸集. 下面证明 S 为 $(\mathscr{C}_h,|\cdot|_h)$ 中的紧集.

设 $\{\varphi_n\}$ 为 S 中的一个序列, 往证存在子序列 $\{\varphi_{n_k}\}$, 使得当 $n_k\to\infty$ 时, φ_{n_k} 按 $|\cdot|_h$ 趋近于某 $\varphi_0\in S$. 记 $I_k=[-k,0]$, $k=1,2,\cdots$. 在 I_1 上, 由 S 的定义知 $\{\varphi_n\}$ 一致有界, 等度连续, 由 Ascoli-Arzela 定理可知存在子序列 $\{\varphi_n^{(1)}\}$ 一致收敛于某连续函数 $\varphi_0^{(1)}$, 在 I_2 上, 同理可证 $\{\varphi_n^{(1)}\}$ 也存在子列 $\{\varphi_n^{(2)}\}$, 在 I_2 上一致收敛于某连续函数 $\varphi_0^{(2)}$ 且 $\varphi_0^{(2)}\equiv\varphi_0^{(1)}$, $s\in I_1$. 重复上面过程, 可选取序列 $\{\varphi_n^{(n)}\}$, 它在任意 I_k 上将一致收敛于某连续函数 φ_0 , 满足

$$\varphi_0(s) \equiv \varphi_0^{(k)}(s), \quad s \in I_k,\ k = 1, 2, \cdots.$$

由引理 2.1.2 知 $\lim\limits_{n\to\infty} |\varphi_n^{(n)} - \varphi_0|_h = 0$.

下面证明 $\varphi_0 \in S$.

由于 V 对 φ 按 $|\cdot|_h$ 连续, 故由 $V(t_0, \varphi_n^{(n)}) \leqslant u(t_0)$ 可得到

$$V(t_0, \varphi_0) \leqslant u(t_0).$$

此外, 由于对任意正整数 k 以及任意 $s_1, s_2 \in I_k$ 有 $|\varphi_n^{(n)}(s_1) - \varphi_n^{(n)}(s_2)| \leqslant M|s_1 - s_2|$, 由定理 2.1.1 即得 $|\varphi_0(s_1) - \varphi_0(s_2)| \leqslant M|s_1 - s_2|$. 又由于对任意正整数 k 有

$$W(|\varphi_n^{(n)}|^{[-k,0]}) \leqslant W(|\varphi_n^{(n)}|) \leqslant u_0,$$

由引理 2.1.2 即得 $W(|\varphi_0|^{[-k,0]}) \leqslant u_0$, 即 $|\varphi_0|^{[-k,0]} \leqslant W^{-1}(u_0)$, 从而 $|\varphi_0| \leqslant W^{-1}(u_0)$ 或 $W(|\varphi_0|) \leqslant u_0$, 于是 $\varphi_0 \in \mathscr{C}_h$, $\varphi_0 \in S$, S 为 $(\mathscr{C}_h, |\cdot|_h)$ 中的紧集.

在 S 中定义映射 P 如下, 对于 $\varphi \in S$, 令

$$P(\varphi) = x_{t_0+\omega}(t_0, \varphi),$$

由条件 (vi) 知映射 P 是连续的.

下面证明 $P(\varphi) \in S$. 令

$$V(t) = V(t, x_t(t_0, \varphi)), \quad t \geqslant t_0,$$

当 $x(t_0, \varphi)(t)$ 存在的时候. 由条件 (iii),(iv) 以及微分不等式有关系 $V(t) \leqslant u(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \omega]$. 再由条件 (ii) 知 $x(t_0, \varphi)(t)$ 在 $[t_0, t_0 + \omega]$ 上存在. 由于

$$W(|x(t_0, \varphi)(t)|) \leqslant V(t, x_t(t_0, \varphi)) \leqslant u(t) \leqslant u_0, \quad t \in [t_0, t_0 + \omega]$$

以及 $W(|\varphi|) \leqslant u_0$, 故有 $W(|x_{t_0+\omega}|) \leqslant u_0$. 由条件 (v) 及 (iii) 有

$$\begin{aligned} V(t_0, x_{t_0+\omega}(t_0, \varphi)) &\leqslant V(t_0 + \omega, x_{t_0+\omega}(t_0, \varphi)) \\ &= V(t_0 + \omega) \leqslant u(t_0 + \omega) \leqslant u(t_0) \leqslant u_0. \end{aligned}$$

又由于事实上,

$$x_{t_0+\omega}(s) = x(t_0, \varphi)(t_0 + \omega + s), \quad -\infty < s \leqslant 0,$$

而右端为方程 (2.4.1) 的解曲线的一段, 由 M 的定义有

$$|x_{t_0+\omega}(s_1) - x_{t_0+\omega}(s_2)| \leqslant M|s_1 - s_2|, \quad s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^-,$$

于是 $P(\varphi) \in S$, P 是 S 到 S 的映射. 由 Schauder 不动点定理, 映射 P 在 S 内有不动点 φ^*, 即 $P(\varphi^*) = \varphi^*$, 亦即

$$x_{t_0+\omega}(t_0, \varphi^*) = x_{t_0}(t_0, \varphi^*),$$

由条件 (i) 可知 $x(t_0,\varphi^*)(t+\omega)$ 也是方程 (2.4.1) 的一个解. 由解的唯一性以及

$$x(t_0,\varphi^*)(t+\omega)=x(t_0,x_{t_0+\omega}(t_0,\varphi^*))(t),\quad t\geqslant t_0$$

可知

$$x(t_0,\varphi^*)(t+\omega)=x(t_0,\varphi^*)(t),\quad t\geqslant t_0.$$

于是 $x(t_0,\varphi^*)(t)$ 是以 ω 为周期的周期解. 定理证毕. ■

本节内容主要取自文献 [164], [166].

2.5 Massera 型周期解定理

考虑常微分方程

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{2.5.1}$$

其中, $f(t,x)$ 在 $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ 上有定义. 假设 $f(t,x)$ 连续且满足解的存在唯一性定理. 此外, 还假定 $f(t+\omega,x)=f(t,x)\ \ (\omega>0)$.

1950 年, Massera[121] 对纯量周期常微分方程 (2.5.1) 建立了著名的周期解存在性定理, 证明了: 如果方程 (2.5.1) 存在正向有界解 $x(t)$, 即存在常数 $L>0$, 使得当 $t\geqslant 0$ 时有 $|x(t)|\leqslant L$, 则方程 (2.5.1) 至少存在一个周期为 ω 的周期解. 这就是著名的 Massera 周期解定理. 显然, 在满足解的存在唯一性的前提下, 存在正向 (或负向) 有界解是方程 (2.5.1) 存在与 f 具有相同周期 ω 的周期解的充要条件. 这个结论对二维自治系统仍然成立 (参见文献 [132] 第 4 章定理 24), 即系统 $\dot{x}=P(x,y),\dot{y}=Q(x,y)$ 存在周期解的充要条件是该系统至少有一个正 (或负) 向有界解, 但遗憾的是 Massera[121] 举反例说明对于二维周期系统,

$$\dot{x}=f(t,x,y),\quad \dot{y}=g(t,x,y), \tag{2.5.2}$$

结论不真. 其中, f,g 为实连续函数, 当 $t\geqslant 0,|x|<+\infty,|y|<+\infty$ 时有定义, 而且满足解的存在唯一性定理. 此外

$$f(t+\omega,x,y)=f(t,x,y),g(t+\omega,x,y)=g(t,x,y),\quad \omega>0.$$

例 2.5.1　考虑系统[121]

$$\begin{cases}\dot{x}=f(u,v)\cos^2\pi t-g(u,v)\sin\pi t\cos\pi t-\pi y,\\ \dot{y}=g(u,v)\cos^2\pi t+f(u,v)\sin\pi t\cos\pi t+\pi x,\end{cases} \tag{2.5.3}$$

其中, x,y 为实变量且

$$u=x\cos\pi t+y\sin\pi t,\quad v=y\cos\pi t-x\sin\pi t,$$

并且 f 与 g 满足如下假设:

(i) f 与 g 有连续的一阶偏导数;

(ii) $f(-u,-v)=f(u,v), g(-u,-v)=g(u,v)$;

(iii) $f(1,0)=g(1,0)=0$ 对所有的 $v, f(0,v)=0, g(0,v)>0$;

(iv) g 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{g(0,v)}\mathrm{d}v<\frac{2}{\pi}.$$

例如, $f=uv, g=c(1-u^2)(1+v^2), c>\dfrac{\pi^2}{2}$ 便满足上述条件. Massera[121] 证明了系统 (2.5.3) 有有界解且存在以 2 为周期的周期解 (次调和解), 但没有以 1 为周期的周期解 (调和解).

若要使定理结论对方程 (2.5.2) 也成立需附加其他条件. 例如, Massera[121] 证明了若方程 (2.5.2) 存在一个正向有界解, 而且所有的解当 $t\to+\infty$ 时都存在, 则方程 (2.5.2) 至少存在一个以 ω 为周期的周期解. 这个结果推广了 Levinson 的一个定理[100], 在 Levinson 的定理中假定系统 (2.5.2) 的所有解正向一致有界. 关于这方面的其他进一步结果, 读者可参见文献 [126, 132].

在文献 [121] 中, Massera 同时证明了上述结论对于线性向量型周期常微分方程系统仍然是成立的, 即存在周期解当且仅当存在有界解. 利用 Massera 周期解定理还可以进一步推导出其他判别周期解存在的准则[132]. 1989 年, Ding[37] 进一步推广了 Massera 的结果, 得到了比较完整的结果.

1990 年, 王克[148] 对 Massera 周期解定理作了推广, 去掉了方程满足解的唯一性的假设, 拓广了定理的应用范围; 1992 年, 魏俊杰[169] 将 Massera 周期解定理推广到了纯量周期脉冲微分方程.

众所周知, 泛函微分方程是比常微分方程更为广泛方程类型. 一个自然的问题是上述结果是否可以推广到泛函微分方程, 当然对于一般的泛函微分方程系统, 上述结论是不成立的, 仅仅存在有界解不足以保证系统存在周期解 (详见文献 [69]).

将 Massera 周期解定理推广到周期泛函微分方程基本上有两个思路: 一是针对一般的周期泛函微分方程系统, 在系统存在有界解的前提下, 寻求保证存在周期解的额外条件; 二是将系统特殊化, 研究对于什么样的泛函微分方程系统上述结论仍然成立, 无须附加其他条件.

1973 年, Chow[29] 对于一类具有有限时滞的线性纯量滞后型周期泛函微分方程证明了类似结果.

考虑系统

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t)+f(t), \tag{2.5.4}$$

其中, $x_t(\cdot) = x(t+\cdot) \in C = C([-r,0],\mathbb{R}), L: (-\infty,+\infty)\times C \to \mathbb{R}$ 关于 t 是 ω 周期的且 $\omega \geqslant r$, 关于 $\varphi \in C$ 是线性的, f 是 ω 周期函数, L 和 f 是连续的. Chow[29] 利用常数变易公式证明了如果 $r \leqslant \omega$ 且方程 (2.5.4) 存在一个有界解, 则方程 (2.5.4) 存在以 ω 为周期的周期解. 虽然 Chow 将 Massera 周期解定理推广到了具有有限时滞的线性纯量滞后型周期泛函微分方程, 但美中不足的是有一个小时滞的限制:$\omega \geqslant r$.

1996 年, Li 等[105] 研究了超前型及滞后型泛函微分方程周期解的存在性, 证明了所考虑的系统存在周期解当且仅当存在有界解, 推广 Chow 的结果, 去掉了 $r \leqslant \omega$ 的限制. 1999 年, 在文献 [104] 中又将 Massera, Chow 的结果推广到了 Banach 空间中周期线性发展方程.

1995 年, Makay[120] 对于具有有限时滞的线性周期 RFDE(1.6.1)、具有无限时滞的线性周期 RFDE(1.6.2) 以及周期线性积分方程用不动点定理方法证明了有界解的存在性蕴含了周期解的存在性, 推广了 Massera 和 Chow 的结果.

2000 年, 范猛和王克[49] 以 $\mathscr{C}_h$ 空间为相空间, 应用 Schauder 不动点定理, 证明了: 对于具有无限时滞的线性中立型周期泛函微分方程 (1.6.4), 存在周期解当且仅当存在有界解, 推广了 Massera , Chow, Makay 的结果.

2000 年, 范猛和王克在文献 [50] 中引入了一类更为广泛的凸中立型方程的概念 (即如果一个方程的解的集合是凸集, 则称这个方程为凸方程), 显然它是线性方程的推广. 在文献 [50] 中, 他们证明了: 具有有限时滞的凸中立型周期泛函微分方程和具有无限时滞的凸中立型周期泛函微分方程存在周期解当且仅当存在有界解. 此外, 文献 [50] 同时考虑了一类具有有限时滞的凸超中立型泛函微分方程

$$x(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t),$$

其中, $x_t(\theta) = x(t+\theta), \dot{x}_t(\theta) = \dot{x}(t+\theta), \theta \in [-r, 0]$. 证明了: 此方程存在周期解当且仅当存在有界解.

Benkhalti 等[6], Hernández[78] 将 Massera 周期解定理推广到了偏泛函微分方程. 最近, Wang 等[162] 将 Massera 周期解定理推广到了一阶拟线性偏微分方程. Han 等[75] 将 Massera 周期解定理推广到了微分包含. Zhang 等[185] 将 Massera 周期解定理推广到了差分方程. Liu 等[115] 将 Massera 周期解定理推广到了常时标动力学方程, 得到了更为一般的结果.

另一方面, 近年来, 一些学者开始研究微分方程解的有界性和反周期解、拟周期解、概周期解等的存在性, 建立了 Massera 型判据. 例如, Chen[28] 将 Massera 周期解定理推广到了反周期情形, Murakami 等[125]、Ezzinbi 等[43] 将 Massera 周期解定理推广到了概周期情形, Hino 等[83] 将 Massera 周期解定理推广到了几乎自守情形等.

本节主要介绍文献 [49] 的工作.

考虑具有无限时滞的中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}Dx_t}{\mathrm{d}t}=f(t,x_t), \tag{2.5.5}$$

其中, $x_t(s)=x(t+s)$, $s\in\mathbb{R}^-$.

本节选取 $\mathscr{C}_h$ 为相空间. 设 $h\in C(\mathbb{R}^-,\mathbb{R})$ 满足 $h(s)>0$ 和 $l=\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s<+\infty$.

引理 2.5.1 对任意 $\sigma\in\mathbb{R},\alpha\geqslant 0,x\in\mathscr{C}_h$ 有

$$|x_{\sigma+\alpha}|_h\leqslant 2l\sup_{s\in[\sigma,\sigma+\alpha]}|x(s)|+|x_\sigma|_h.$$

证明 事实上,

$$\begin{aligned}
|x_{\sigma+\alpha}|_h&=\int_{-\infty}^{0}h(s)|x_{\sigma+\alpha}|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\
&=\int_{-\infty}^{-\alpha}h(s)|x_{\sigma+\alpha}|^{[s,0]}\mathrm{d}s+\int_{-\alpha}^{0}h(s)|x_{\sigma+\alpha}|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{-\alpha}h(s)(|x_{\sigma+\alpha}|^{[s,-\alpha]}+|x_{\sigma+\alpha}|^{[-\alpha,0]})\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_{-\alpha}^{0}h(s)|x_{\sigma+\alpha}|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{-\alpha}h(s)|x_{\sigma+\alpha}|^{[s,-\alpha]}\mathrm{d}s+2l\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\sigma+\alpha}|x(s)|\\
&=2l\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\sigma+\alpha}|x(s)|+\int_{-\infty}^{0}h(s-\alpha)|x_\sigma|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\
&=2l\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\sigma+\alpha}|x(s)|+\int_{-\infty}^{-\alpha}h(s)|x_\sigma|^{[s+\alpha,0]}\mathrm{d}s\\
&\leqslant 2l\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\sigma+\alpha}|x(s)|+\int_{-\infty}^{-\alpha}h(s)|x_\sigma|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\
&=2l\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\sigma+\alpha}|x(s)|+|x_\sigma|_h.
\end{aligned}$$

■

定义 2.5.1 称方程 (2.5.5) 中算子 D 是 h 一致稳定的, 如果存在常数 $k_1>0$, $k_2>0$, 使得广义差分方程 $Dx_t=g(t),t\geqslant\sigma$, $x_\sigma=\varphi$ 的解 $x_t(\sigma,\varphi)$ 满足

$$|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant k_1\sup_{\theta\in[\sigma,t]}|g(\theta)|+k_2|x_\sigma|_h,$$

其中, $\varphi \in \mathscr{C}_h, x_t \in \mathscr{C}_h$, $g \in C([\sigma,+\infty),\mathbb{R}^n)$.

在方程 (2.5.5) 中, 假设 $D:\mathscr{C}_h \to \mathbb{R}^n$ 是线性、连续、h 一致稳定的, $f:\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h \to \mathbb{R}^n$ 连续且关于 φ 是线性的, 关于 t 是 ω 周期的, 即 $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$. 方程 (2.5.5) 过 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$ 的解记为 $x_t(\sigma,\varphi)$. 文献 [18] 建立了具有无限时滞的中立型泛函微分方程的基本理论. 在上述假设之下, 由文献 [18] 易知对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$, (2.5.5) 存在唯一解 $x_t(\sigma,\varphi)$, 而且满足解对初始条件的连续依赖性. 此外, 如果解是有界的, 则可延展到无穷.

引理 2.5.2 *设 D 是线性、连续、h 一致稳定的. 对 $g\in C([\alpha,+\infty),\mathbb{R}^n)$ $(\alpha\geqslant-\infty)$, 存在常数 $G>0$, 使得对任意 $t_1,t_2\in[\alpha,+\infty)$ 有*

$$|g(t_1)-g(t_2)|\leqslant G|t_1-t_2|;$$

若 $x_t(\sigma,\varphi)$ 是 $Dx_t=g(t), t\geqslant\sigma$, $x_\sigma=\varphi, \varphi\in\mathscr{C}_h$ 的解, 则存在常数 $N(G)>0$, 使得对任意 $t_1,t_2\in[\sigma,+\infty)(\sigma\geqslant\alpha)$ 有

$$|x(\sigma,\varphi)(t_1)-x(\sigma,\varphi)(t_2)|\leqslant N(G)|t_1-t_2|,$$

其中, $N(G)=k_1(1+2lk_2)G$.

证明 对任意 $t\in[\sigma,+\infty)$, $\Delta>0$, 由 D 的线性性, 有

$$D(x_{t+\Delta}(\sigma,\varphi)-x_t(\sigma,\varphi))=Dx_{t+\Delta}(\sigma,\varphi)-Dx_t(\sigma,\varphi)=g(t+\Delta)-g(t).$$

由 D 的 h 一致稳定性, 有

$$\begin{aligned}&|x(\sigma,\varphi)(t+\Delta)-x(\sigma,\varphi)(t)|\\ \leqslant&k_1\sup_{\theta\in[\sigma,t]}|g(\theta+\Delta)-g(\theta)|+k_2|x_{\sigma+\Delta}-x_\sigma|_h\\ \leqslant&k_1G\Delta+k_2|x_{\sigma+\Delta}-x_\sigma|_h.\end{aligned}\tag{2.5.6}$$

进一步, 对任意 $s\in[\sigma,t]$, 由 D 的 h 一致稳定性, 还有

$$\begin{aligned}|x(\sigma,\varphi)(s)-x(\sigma,\varphi)(\sigma)|\leqslant&k_1\sup_{\tau\in[\sigma,s]}|g(\tau)-g(\sigma)|+k_2|x_\sigma-x_\sigma|_h\\ \leqslant&k_1G|s-\sigma|.\end{aligned}$$

由引理 2.5.1 有

$$\begin{aligned}&|x_s(\sigma,\varphi)-x_\sigma(\sigma,\varphi)|_h\\ \leqslant&2l\sup_{\tau\in[\sigma,s]}|x(\sigma,\varphi)(\tau)-x(\sigma,\varphi)(\sigma)|+|x_\sigma(\sigma,\varphi)-x_\sigma(\sigma,\varphi)|_h\\ \leqslant&2lk_1G|s-\sigma|,\end{aligned}$$

故

$$|x_{\sigma+\Delta} - x_\sigma|_h \leqslant 2lk_1G\Delta. \tag{2.5.7}$$

由 (2.5.6), (2.5.7) 有

$$|x(\sigma,\varphi)(t+\Delta) - x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant k_1G\Delta + 2lk_1k_2G\Delta := N(G)\Delta.$$

因此, 对任意 $t_1, t_2 \in [\sigma, +\infty)$, 存在常数 $N(G) > 0$, 使得

$$|x(\sigma,\varphi)(t_1) - x(\sigma,\varphi)(t_2)| \leqslant N(G)|t_1 - t_2|,$$

其中, $N(G) = k_1(1 + 2lk_2)G$. 证毕. ■

定理 2.5.1 *方程 (2.5.5) 存在 ω 周期解当且仅当存在一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的有界解 (依上确界范数).*

证明 由于周期解本身即是一个有界解, 只需证明有界解的存在性蕴含了周期解的存在性. 为简单起见, 不失一般性, 假设 $\sigma = 0$.

设 x_t 是 (2.5.5) 在 $\mathbb{R}$ 上有定义的有界解且界为 B, 即 $|x_t| \leqslant B$, 则有

$$|x_t|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \leqslant Bl.$$

由 f 的线性性及周期性知存在常数 $G \geqslant 0$, 使得对任意 $\varphi \in \mathscr{C}_h$ 且 $|\varphi|_h \leqslant Bl$ 有

$$|f(t,\varphi)| \leqslant G.$$

考虑集合

$$\begin{aligned}\Omega := \{\varphi \in \mathscr{C}_h, |\varphi| \leqslant B, \quad & \text{(a)}\\ |\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leqslant N(G)|s_1 - s_2|, s_1, s_2 \in \mathbb{R}^-, \quad & \text{(b)}\\ |x_t(0,\varphi)| \leqslant B, \quad t \geqslant 0\}, \quad & \text{(c)}\end{aligned}$$

其中, $x_t(0,\varphi)$ 是 (2.5.5) 过 $(0,\varphi)$ 的唯一解, $N(G) = k_1(1 + 2lk_2)G$.

首先证明 Ω 非空.

考虑有界解 x_t, 定义 $\varphi_0(s) := x_0(s) = x(s), s \in \mathbb{R}^-$, 由定义知 $x_t = x_t(0,\varphi_0)$, 因而 φ_0 满足 Ω 定义中的 (a) 和 (c). 下面证明 φ_0 满足 (b). 对任意给定的 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^-$, 可以选取 $\eta > 0$, 使得 $s_1, s_2 > -\eta$. 令 $\varphi_{-\eta} := x_{-\eta}(s) = x(s-\eta)$, $s \in \mathbb{R}^-$, 则 $x_t = x_t(0,\varphi_0) = x_t(-\eta,\varphi_{-\eta})$. (2.5.5) 的有界解 x_t 满足

$$Dx_t = Dx_t(-\eta,\varphi_{-\eta}) = D\varphi_{-\eta} + \int_{-\eta}^{t} f(s, x_s(-\eta,\varphi_{-\eta}))\mathrm{d}s := g(t),$$

则由 x_t 的有界性及 f 的线性性, 对任意 $t_1, t_2 \in [-\eta, +\infty)$ 有

$$\begin{aligned}|g(t_1) - g(t_2)| &= \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x_s(-\eta, \varphi_{-\eta}))\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} |f(s, x_s(-\eta, \varphi_{-\eta}))|\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant G|t_1 - t_2|,\end{aligned}$$

于是由引理 2.5.2 有

$$|x(-\eta, \varphi_{-\eta})(t_1) - x(-\eta, \varphi_{-\eta})(t_2)| \leqslant N(G)|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in [-\eta, +\infty).$$

因此

$$\begin{aligned}|\varphi_0(s_1) - \varphi_0(s_2)| &= |x_0(-\eta, \varphi_{-\eta})(s_1) - x_0(-\eta, \varphi_{-\eta})(s_2)| \\ &= |x(-\eta, \varphi_{-\eta})(s_1) - x(-\eta, \varphi_{-\eta})(s_2)| \\ &\leqslant N(G)|s_1 - s_2|.\end{aligned}$$

由 s_1, s_2 的任意性知 φ_0 满足 Ω 的定义中的条件 (b), 故 $\varphi_0 \in \Omega$, 即 Ω 是非空的.

下面证明 Ω 是凸的和紧致的.

事实上, 容易证明 Ω 是闭集且是紧致的. 对任意 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega, \alpha \in [0,1]$ 有

$$|\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2| \leqslant \alpha|\varphi_1| + (1-\alpha)|\varphi_2| \leqslant B,$$

$$|\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|\alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2|^{[s,0]}\mathrm{d}s \leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)B\mathrm{d}s = Bl$$

和

$$\begin{aligned}&|\alpha\varphi_1(s_1) + (1-\alpha)\varphi_2(s_1) - (\alpha\varphi_1(s_2) + (1-\alpha)\varphi_2(s_2))| \\ \leqslant\, &\alpha|\varphi_1(s_1) - \varphi_1(s_2)| + (1-\alpha)|\varphi_2(s_1) - \varphi_2(s_2)| \\ \leqslant\, &N(G)|s_1 - s_2|, \quad s_1, s_2 \in (-\infty, 0].\end{aligned}$$

由于 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega$, 故 $x_t(0, \varphi_1), x_t(0, \varphi_2)$ 是 (2.5.5) 的解. 对任意 $\alpha \in [0,1]$, 由 f 及 D 的线性性知 $\alpha x_t(0, \varphi_1) + (1-\alpha)x_t(0, \varphi_2)$ 也是 (2.5.5) 的解, 再由解的唯一性有

$$x_t(0, \alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2) = \alpha x_t(0, \varphi_1) + (1-\alpha)x_t(0, \varphi_2),$$

因而

$$\begin{aligned}|x_t(0, \alpha\varphi_1 + (1-\alpha)\varphi_2)| &= |\alpha x_t(0, \varphi_1) + (1-\alpha)x_t(0, \varphi_2)| \\ &\leqslant \alpha|x_t(0, \varphi_1)| + (1-\alpha)|x_t(0, \varphi_2)| \\ &\leqslant B,\end{aligned}$$

至此已经证明 Ω 是凸的和紧致的.

定义 $P:\Omega\to\Omega$ 为

$$P\varphi := x_\omega(0,\varphi),$$

即

$$P\varphi(s) := x_\omega(0,\varphi)(s) = x(0,\varphi)(s+\omega), \quad s\in\mathbb{R}^-.$$

由解对初始条件的连续依赖性, 显然 P 是连续的.

下面证明 P 将 Ω 映入 Ω.

由于 φ 满足 Ω 定义中的条件 (c), 易知 $P\varphi$ 满足 Ω 定义中的条件 (a). 对 $t\geqslant 0$, 由 f 的周期性及解的唯一性有

$$|x_t(0,P\varphi)| = |x_t(0,x_\omega(0,\varphi))| = |x_{t+\omega}(\omega,x_\omega(0,\varphi))| = |x_{t+\omega}(0,\varphi)| \leqslant B.$$

即 $P\varphi$ 满足 Ω 定义中的条件 (c). 注意到 (2.5.5) 的初值问题 $x_0=\varphi$ 等价于

$$Dx_t = D\varphi + \int_0^t f(s,x_s(0,\varphi))\mathrm{d}s := g(t), \quad t\geqslant 0.$$

对任意 $t_1,t_2\in\mathbb{R}^+$, 由于 $\varphi\in\Omega$ 且 $x_t(0,\varphi)$ 有界, 故

$$\begin{aligned}|g(t_1)-g(t_2)| &= \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s,x_s(0,\varphi))\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} |f(s,x_s(0,\varphi))|\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant G|t_1-t_2|,\end{aligned}$$

由引理 2.5.2, 解 $x_t(0,\varphi)$ 满足

$$|x(0,\varphi)(t_1)-x(0,\varphi)(t_2)| \leqslant N(G)|t_1-t_2|, \quad t_1,t_2\in\mathbb{R}^+. \tag{2.5.8}$$

由于 $\varphi\in\Omega$, 故

$$|x(0,\varphi)(t_1)-x(0,\varphi)(t_2)| = |\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \leqslant N(G)|t_1-t_2|, \quad t_1,t_2\in\mathbb{R}^-. \tag{2.5.9}$$

至此, 可以断言

$$|P\varphi(s_1)-P\varphi(s_2)| \leqslant N(G)|s_1-s_2|, \quad s_1,s_2\in\mathbb{R}^-.$$

事实上, 若 $s_1,s_2\in[-\omega,0]$(或 $s_1,s_2\in(-\infty,-\omega]$), 由 (2.5.8) (或 (2.5.9)) 有

$$\begin{aligned}|P\varphi(s_1)-P\varphi(s_2)| &\leqslant |x_\omega(0,\varphi)(s_1)-x_\omega(0,\varphi)(s_2)| \\ &= |x(0,\varphi)(s_1+\omega)-x(0,\varphi)(s_2+\omega)| \\ &\leqslant N(G)|s_1-s_2|;\end{aligned}$$

若 $s_1 \in (-\infty, -\omega], s_2 \in [-\omega, 0]$, 显然 $s_1 \leqslant -\omega \leqslant s_2$, 由 (2.5.8) 和 (2.5.9), 有

$$
\begin{aligned}
|P\varphi(s_1) - P\varphi(s_2)| &= |x_\omega(0,\varphi)(s_1) - x_\omega(0,\varphi)(s_2)| \\
&= |x(0,\varphi)(s_1+\omega) - x(0,\varphi)(s_2+\omega)| \\
&= |x(0,\varphi)(s_1+\omega) - x(0,\varphi)(0)| \\
&\quad + |x(0,\varphi)(0) - x(0,\varphi)(s_2+\omega)| \\
&\leqslant N(G)|s_1+\omega| + N(G)|s_2+\omega| \\
&= -N(G)(s_1+\omega) + N(G)(s_2+\omega) \\
&= N(G)|s_1 - s_2|,
\end{aligned}
$$

即 $P\varphi$ 满足 Ω 定义中的条件 (b). 因此, P 将 Ω 映入 Ω. 由 Schauder 不动点定理, P 在 Ω 中有不动点, 即存在 $\psi \in \Omega$, 使得 $P\psi = \psi$, 亦即 $x_\omega(0,\psi) = x_0(0,\psi)$. 由 f 的周期性及解的唯一性有

$$
x_{t+\omega}(0,\psi) = x_t(0,\psi), \quad t \geqslant 0.
$$

因此, $x_t(0,\psi)$ 是 (2.5.5) 的 ω 周期解. 证毕. ∎

注 2.5.1 如果 $D\varphi = \varphi(0)$, 则定理 2.5.1 即是 Makay 在文献 [120] 中所证明的定理 2.

注 2.5.2 不动点定理方法是研究存在性问题 (特别是周期解问题) 的重要工具. 近年来, 一些学者[20, 176] 尝试使用不动点定理方法研究常 (泛函) 微分方程的稳定性. 众所周知, Lyapunov 第二方法 (直接法) 是研究稳定性的主要工具. 但 Lyapunov 第二方法也有一定的局限性. 例如, 在应用 Lyapunov 直接法研究稳定性时, 关键问题是构造合适的 Lyapunov 函数 (泛函), 而 Lyapunov 函数 (泛函) 的构造没有一般方法可循且具有很高的技巧性, 很多情况下, 经验是重要的; 应用 Lyapunov 函数 (泛函) 研究稳定性时, 在很多情况下, 得到的条件是 "点态" 的, 而实际问题往往需要的是 "平均" 条件[56]. Burton[20] 对这两种方法作了比较详尽的比较, 文献 [176] 应用 Banach 压缩映射原理和 Schauder 不动点定理研究了一类时滞微分方程的稳定性, 研究表明, 与 Lyapunov 第二方法相比, 应用不动点定理研究稳定性具有很多优越性, 但目前这方面的研究工作尚不深入.

2.6 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定和 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的等价性

在某些问题, 如在周期解或概周期解的研究中, 需要用到 $\mathscr{B}$ 空间中的稳定性, 但通常运用 Lyapunov 第二方法只能得到 $\mathbb{R}^n$ 中的稳定性. 因此研究这两种稳定性的相互关系, 既有其本身的理论价值, 又有很大的实用意义. 尽管在文献 [73] 中研究了这个问题, 但那里的条件不够具体, 所以有必要详尽研究 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定性和 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定性之间的关系.

考虑方程

$$x'(t) = f(t, x_t), \tag{2.6.1}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$, Ω 是 $\mathbb{R} \times \mathscr{C}_h$ 中的开集, $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 连续且对 φ 满足局部 Lipschitz 条件.

定理 2.6.1 方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定的当且仅当 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的.

证明 若方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定的, 则对任意 $\sigma \geqslant 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta$ 就有

$$|x_t(\sigma, \varphi) - u_\sigma|_h < \varepsilon, \quad t \geqslant \sigma.$$

于是

$$|x(\sigma, \varphi)(t) - u(t)| \leqslant \frac{1}{l}|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|_h. \tag{2.6.2}$$

对上面的常数 σ, ε, δ, 由 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta$ 推得 $|x(\sigma, \varphi)(t) - u(t)| < \dfrac{\varepsilon}{l}$, $t \geqslant \sigma$. 这就是要证的 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定性.

若解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的, 则对任意 $\sigma \geqslant 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta < \varepsilon$, 使得只要 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta$ 就有 $|x(\sigma, \varphi)(t) - u(t)| < \varepsilon$, $t \geqslant \sigma$. 于是对所有的 $t \geqslant \sigma$ 有

$$\begin{aligned}
|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&= \left(\int_{-(t-\sigma)}^{0} + \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)}\right) h(s)|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\left[|\varphi - u_\sigma|^{[s+(t-\sigma),0]} + |x_t(\sigma, \varphi) - u_t|^{[-(t-\sigma),0]}\right]\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)\varepsilon\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\left[\varepsilon + |\varphi - u_\sigma|^{[s+(t-\sigma),0]}\right]\mathrm{d}s \\
&\leqslant l\varepsilon + l\varepsilon + |\varphi - u_\sigma|_h < (2l+1)\varepsilon, \quad t \geqslant \sigma.
\end{aligned}$$

因此

$$|x_t(\sigma, \varphi) - u_t|_h < (2l+1)\varepsilon, \quad t \geqslant \sigma.$$

这说明 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定的. 定理证毕. ∎

定理 2.6.2　方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致稳定的当且仅当 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的.

证明完全类似于定理 2.6.1 的证明, 此处从略.

定理 2.6.3　方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 渐近稳定的当且仅当 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的.

证明　若 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 渐近稳定的, 则对任意 $\sigma \geqslant 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得只要 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta_0$ 就有

$$|x_t(\sigma,\varphi) - u_t|_h \to 0, \quad t \to +\infty.$$

由 (2.6.2) 有

$$|x(\sigma,\varphi)(t) - u(t)| \to 0, \quad t \to +\infty.$$

由定理 2.6.1 易知 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的, 故 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的.

若 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的, 则对任意 $\sigma \geqslant 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$ 和满足 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta_0$ 的 $x(\sigma,\varphi)(t)$, 存在 $N = N(\varepsilon,\sigma,\varphi)$, 只要 $t \geqslant \sigma + N$ 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t) - u(t)| < \varepsilon$.

因为 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的, 故对任意 $\sigma \geqslant 0$ 和 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta$ 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t) - u(t)| \leqslant 1, \quad t \geqslant \sigma.$$

于是对上面的常数 ε, σ, 如果取 $0 < \delta^* < \min\{\delta_0, \delta, \varepsilon\}$, 则只要 $|\varphi - u_\sigma|_h < \delta^*$ 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t) - u(t)| \leqslant 1, \quad t \geqslant \sigma$$

和

$$|x(\sigma,\varphi)(t) - u(t)| < \varepsilon, \quad t \geqslant \sigma + N.$$

因为 $\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s = l < +\infty$, 所以存在 $T > N$, 使得

$$\int\limits_{-\infty}^{-(T-N)} h(s)\mathrm{d}s < \varepsilon.$$

因此, 对所有的 $t \geqslant \sigma + T$ 有

$$\begin{aligned}|x_t(\sigma,\varphi) - u_t|_h &= \int\limits_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi) - u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &= \left(\int\limits_{-\infty}^{-(t-\sigma)} + \int\limits_{-(t-\sigma)}^{-(T-N)} + \int\limits_{-(T-N)}^{0}\right) h(s)|x_t(\sigma,\varphi) - u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\left[|\varphi-u_\sigma|^{[s+(t-\sigma),0]}+|x-u|^{[\sigma,t]}\right]\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_{-(t-\sigma)}^{-(T-N)} h(s)\mathrm{d}s+\varepsilon\int_{-(T-N)}^{0} h(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant |\varphi-u_\sigma|_h+\int_{-\infty}^{-(T-N)} h(s)\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{-(T-N)} h(s)\mathrm{d}s+\varepsilon l\\
&<(3+l)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此, $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定的. 综上所述, $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 渐近稳定的. 定理证毕. ∎

定理 2.6.4 *如果方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度渐近稳定的, 则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度渐近稳定的. 如果 $h(s)$ 还满足条件*

$$
h(s-\beta)\leqslant M(\beta)h(s),\quad s\in\mathbb{R}^-,\ \beta\in\mathbb{R}^+, M(\beta)\to 0,\ \beta\to+\infty, \tag{2.6.3}
$$

则如果 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度渐近稳定的, 它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度渐近稳定的.

证明 定理前一部分的证明完全类似于定理 2.6.1 的证明, 故此处从略. 下面证明定理的第二部分.

若方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度渐近稳定的, 则对任意 $\sigma\geqslant 0$ 和 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon,\sigma)>0$, 使得只要 $|\varphi-u_\sigma|_h<\delta_0$ 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)-u(t)|<\varepsilon,\ t\geqslant\sigma+N$.

由定理 2.6.3 的证明知存在 $\delta^*\in(0,\varepsilon)$, 使得只要 $|\varphi-u_\sigma|_h<\delta^*$ 就有

$$
|x(\sigma,\varphi)(t)-u(t)|\leqslant 1,\quad t\geqslant\sigma
$$

和

$$
|x(\sigma,\varphi)(t)-u(t)|<\varepsilon,\quad t\geqslant\sigma+N.
$$

由 (2.3.3), 可以选取 $T>N$, 使得

$$
\int_{-\infty}^{-(T-N)} h(s)\mathrm{d}s<\varepsilon,\ M(t)<\varepsilon,\quad t\geqslant T-N.
$$

于是对所有 $t\geqslant\sigma+T$ 有

$$
\begin{aligned}
|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|_h&=\int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\
&=\left(\int_{-\infty}^{(t-\sigma)}+\int_{-(t-\sigma)}^{-(T-N)}+\int_{-(T-N)}^{0}\right)h(s)|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&< \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\left[|\varphi - u_\sigma|^{[s+(t-\sigma),0]} + 1\right]\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-(T-N)} h(s)\mathrm{d}s + \varepsilon \int_{-(T-N)}^{0} h(s)\mathrm{d}s \\
&< \int_{-\infty}^{0} h(s-(t-\sigma))|\varphi - u_\sigma|^{[s,0]}\mathrm{d}s + 2\varepsilon + l\varepsilon \\
&\leqslant M(t-\sigma)|\varphi - u_\sigma|_h + (2+l)\varepsilon < \varepsilon^2 + (2+l)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

可以取 $\varepsilon < 1$, 因而有

$$|x_t(\sigma,\varphi) - u_t|_h < (3+l)\varepsilon, \quad t \geqslant \sigma + T.$$

因此, $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定的. 综上所述, $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度渐近稳定的. 定理证毕. ■

定理 2.6.5 如果方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致渐近稳定的, 则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的. 若条件 (2.6.3) 成立且 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的, 则它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致渐近稳定的.

证明完全类似于定理 2.6.4 的证明, 故此处从略.

定理 2.6.6 如果方程 (2.6.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 指数渐近稳定的, 则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的. 如果条件 (2.6.3) 成立且 $h(s)$ 满足

$$M(\beta) \leqslant \eta \exp(-\xi\beta), \quad \beta \geqslant 0,\ \xi > c, \quad \eta \geqslant 0, \tag{2.6.4}$$

其中, c 是由定义 2.3.5 所定义, 则若 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的, 它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 指数渐近稳定的.

注 2.6.1 对全局指数渐近稳定, 也有类似的结论. 此处从略.

证明 定理的第一部分由 (2.6.2) 立即得到. 下面证明定理的第二部分.

设 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的, 则对任意 $\sigma \geqslant 0$ 和 $|\varphi - u_\sigma|_h < \gamma \leqslant H$ 有

$$|x(\sigma,\varphi)(t) - u(t)| \leqslant L(|\varphi - u_\sigma|_h)\exp(-c(t-\sigma)), \quad t \geqslant \sigma.$$

由 (2.6.3) 和 (2.6.4) 有

$$h(0-\beta) \leqslant M(\beta)h(0) \leqslant \eta h(0)\exp(-\xi\beta), \quad \beta \geqslant 0.$$

这也就是

$$h(s) \leqslant \eta h(0)\exp(\xi s), \quad s \in \mathbb{R}^-, \tag{2.6.5}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&= \left(\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} + \int_{-(t-\sigma)}^{0}\right) h(s)|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)|\varphi-u_\sigma|^{[s+(t-\sigma),0]}\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)|x-u|^{[\sigma,t]}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s-(t-\sigma))|\varphi-u_\sigma|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\quad + L(|\varphi-u_\sigma|_h)\int_{-\infty}^{0} h(s-(t-\sigma))\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)L(|\varphi-u_\sigma|_h)\exp(-c(t+s-\sigma))\mathrm{d}s. \qquad (2.6.6)
\end{aligned}
$$

由 (2.6.5) 得到

$$
\begin{aligned}
\int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)\exp(-c(s+t-\sigma))\mathrm{d}s &\leqslant \eta h(0)\exp(-c(t-\sigma))\int_{-(t-\sigma)}^{0}\exp((\xi-c)s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{\eta h(0)}{\xi-c}\exp(-c(t-\sigma)).
\end{aligned}
$$

再由 (2.6.6) 得到

$$
\begin{aligned}
|x_t(\sigma,\varphi)-u_t|_h &\leqslant M(t-\sigma)|\varphi-u_\sigma|_h + L(|\varphi-u_\sigma|_h)M(t-\sigma)l \\
&\quad + \frac{L(|\varphi-u_\sigma|_h)\eta h(0)\exp(-c(t-\sigma))}{\xi-c} \\
&\leqslant \eta\exp(-\xi(t-\sigma))|\varphi-u_\sigma|_h + lL(|\varphi-u_\sigma|_h)\eta\exp(\xi(t-\sigma)) \\
&\quad + \frac{\eta h(0)}{\xi-c}L(|\varphi-u_\sigma|_h)\exp(-c(t-\sigma)) \\
&\leqslant \left[\eta|\varphi-u_\sigma|_h + l\eta + \frac{\eta h(0)}{\xi-c}L(|\varphi-u_\sigma|_h)\right]\exp(-c(t-\sigma)) \\
&:= L_1(|\varphi-u_\sigma|_h)\exp(-c(t-\sigma)), \quad t\geqslant\sigma.
\end{aligned}
$$

易见 $L_1(\alpha)$ 满足定义 2.3.5 中的条件, 因而 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 指数渐近稳定的. 定理证毕. ∎

下面考虑线性系统

$$x' = A(t, x_t), \tag{2.6.7}$$

其中, $A(t,\varphi) : \mathbb{R} \times \mathscr{C}_h \to \mathbb{R}^n$ 是连续的且对 φ 是线性的.

定理 2.6.7 如果方程 (2.6.7) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 渐近稳定的, 则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 全局指数渐近稳定和 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 全局指数渐近稳定的. 如果 $h(s)$ 满足条件 (2.6.3), 则若 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的, 它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 全局指数渐近稳定和 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 全局指数渐近稳定的.

证明 注意到 $\mathscr{C}_h$ 满足公理 $(B_1) \sim (B_4)$, 所以由文献 [133] 中的定理 3.2 和定理 2.6.5, 定理 2.6.6 立即完成本定理的证明. ∎

在泛函微分方程理论的研究中, 初始函数空间取一种范数, 状态空间可以取另一种范数, 这种做法对泛函微分方程而言不仅可行, 而且非常方便. 前面已经考察了 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 稳定性和 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 稳定性的关系, 下面将考察更一般的情形, 研究诸空间及其范数的不同选择与稳定性之间的关系, 即容许空间对中解的稳定性之间的关系. 首先在容许空间中引入顺序关系.

定义 2.6.1 设 $(X, |\cdot|_X), (Y, |\cdot|_Y)$ 是两个容许空间, 称 $X < Y$, 若存在常数 $b > 0$, 使得对任意的 $\varphi \in X$ 必有 $\varphi \in Y$ 且 $|\varphi|_Y \leqslant b|\varphi|_X$.

下面给出容许空间对中解的稳定性的定义, 不失一般性, 假设 $f(t, 0) = 0$.

定义 2.6.2 设 $(X, |\cdot|_X), (Y, |\cdot|_Y)$ 是两个容许空间且 $X < Y$, 称 (2.6.1) 的零解在 (X, Y) 中,

(1) 稳定, 若对任意的 $\sigma \geqslant 0, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\sigma, \varepsilon) > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma, |x_\sigma|_X < \delta(\sigma, \varepsilon)$ 时, $|x_t|_Y < \varepsilon$, 这里 $x(t)$ 是 (2.6.1) 定义在 $t \geqslant \sigma$ 上的解;

(2) 一致稳定, 若稳定性定义中的 δ 与 σ 无关;

(3) 渐近稳定, 若 (2.6.1) 的零解稳定且对任意的 $\sigma \geqslant 0$, 存在 $\delta_0(\sigma) > 0$, 使得当 $|x_\sigma|_X < \delta_0(\sigma)$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty} |x_t|_Y = 0$;

(4) 等度渐近稳定, 若 (2.6.1) 的零解渐近稳定且渐近稳定性定义中的极限对 $|x_\sigma|_X < \delta_0(\sigma)$ 一致成立, 即存在 $T(\varepsilon, \sigma) > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma + T(\varepsilon, \sigma)$ 及 $|x_\sigma|_X < \delta_0(\sigma)$ 时,$|x_t|_Y < \varepsilon$;

(5) 一致渐近稳定, 若零解一致稳定且存在 $\delta_0 > 0$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T(\varepsilon) > 0$, 当 $\sigma \geqslant 0, t \geqslant \sigma + T(\varepsilon), |x_\sigma|_X < \delta_0$ 时有 $|x_t|_Y < \varepsilon$.

定理 2.6.8 设 $X_i, Y_i (i = 1, 2)$ 都是容许空间且 $X_2 < X_1 < Y_1 < Y_2$, 则 (X_1, Y_1) 中的稳定性可以推出 (X_2, Y_2) 中相同类型的稳定性. 特别地, (X, Y) 中的稳定性 $\Rightarrow (X, \mathbb{R}^n)$ 中的稳定性, 当 X 具有衰减记忆时, $(X, \mathbb{R}^n)$ 中的稳定性 $\Rightarrow (X, X)$

中的稳定性.

证明参见文献 [190] 的 417 页或文献 [102] 的 275 页, 从略.

注 2.6.2 定理 2.6.8 讨论了在 $(X, \mathbb{R}^n)$ 中的稳定性与在 (X, X) 中的稳定性的关系. 由此可以看出, 在有界时滞情形, 这两种稳定性是无差别的. 但时滞无界时, 这两种概念并非一定等价. 例如, 当取 X 为 $(-\infty, 0]$ 上的有界连续函数空间, 并在其上定义上确界范数时, 方程 (2.6.1) 的零解一定不会于 (X, X) 中渐近稳定, 这是由于对方程 (2.6.1) 的任意非零解 $x(t)$, 当 $t \to \infty$ 时,

$$|x_t|_X = \sup_{-\infty < s \leqslant 0} |x(t+s)| \nrightarrow 0.$$

本节内容主要取自文献 [163, 190].

2.7 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 有界与 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 有界的等价性

相空间理论的建立为研究具有无限时滞的泛函微分方程的理论开辟了新的途径. 随着相空间中方程解的基本理论的建立, 对相空间中解的有界性的研究也相继开展起来, 而以往人们都是在有界连续函数空间中, 采用 $\mathbb{R}^n$ 中的上确界模来讨论解的有界性的. 这样, 相空间中的有界性与 $\mathbb{R}^n$ 中有界性之间的关系就成为一个重要的理论课题. 对这个课题的研究也将为其他一些理论问题的研究带来很大的方便. 本节介绍文献 [77] 的工作, 比较系统地讨论 $\mathscr{C}_h$ 空间中的有界性与 $\mathbb{R}^n$ 中有界性之间的关系.

考虑方程

$$x' = f(t, x_t), \tag{2.7.1}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是连续的且对第二变元 φ 满足局部 Lipschitz 条件.

定理 2.7.1 *方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 有界的当且仅当它是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 有界的.*

证明 先证必要性. 因为

$$|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant \frac{1}{l} |x_t(\sigma, \varphi)|_h, \tag{2.7.2}$$

并且方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 有界的, 即对任意的 $\sigma \geqslant 0$, $\varphi \in \mathscr{C}_h$, 存在 $M = M(\sigma, \varphi) > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma$ 时有

$$|x_t(\sigma, \varphi)|_h \leqslant M,$$

因此, 只要取 $M_1 = \dfrac{1}{l} M$ 就有

$$|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant M_1.$$

必要性得证.

再证充分性. 由已知, 方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 有界的, 即对 $\sigma \geqslant 0$, $\varphi \in \mathscr{C}_h$, 存在 $M = M(\sigma,\varphi) > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma$ 时有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant M.$$

于是, 当 $t \geqslant \sigma$ 时有

$$\begin{aligned}
|x_t(\sigma,\varphi)|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&= \left(\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} + \int_{-(t-\sigma)}^{0}\right) h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\left(|\varphi|^{[s+(t-\sigma),0]} + |x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,t]}\right)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)|x(\sigma,\varphi)|^{[t+s,t]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s + M\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\mathrm{d}s + M\int_{-(t-\sigma)}^{0} h(s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant |\varphi|_h + M\int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s = |\varphi|_h + Ml := M_1(\sigma,\varphi).
\end{aligned}$$

充分性得证. 定理证毕. ∎

定理 2.7.2 *方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度有界的当且仅当它是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度有界的.*

证明 必要性的证明与定理 2.7.1 的证明类似, 此处从略.

再证充分性. 由已知, 方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度有界的, 即对任意的 $\sigma \geqslant 0$, $H > 0$, 存在 $M = M(\sigma,H) > 0$, 使得当 $|\varphi|_h \leqslant H$, $t \geqslant \sigma$ 时有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant M.$$

于是, 当 $t \geqslant \sigma$ 时有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} + \int_{-(t-\sigma)}^{0} \right) h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]} \mathrm{d}s$$
$$\leqslant |\varphi|_h + Ml \leqslant H + Ml := M_1 = M_1(\sigma, H) > 0.$$

充分性证毕. 定理证毕. ∎

定理 2.7.3 *方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致有界的当且仅当它是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的.*

证明与定理 2.7.2 完全类似, 此处从略.

定理 2.7.4 *方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 最终有界的当且仅当它是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 最终有界的.*

证明 利用式 (2.7.2), 必要性容易证明. 下证充分性. 由已知, 方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 最终有界的, 即存在 $B > 0$, 使得对 $\sigma \geqslant 0$, $\varphi \in \mathscr{C}_h$ 存在 $T = T(\sigma, \varphi) > 0$, 当 $t \geqslant \sigma + T$ 时有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant B.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]} \mathrm{d}s < \infty \quad \text{及} \quad \int_{-\infty}^{0} h(s) \mathrm{d}s = l < \infty,$$

总可选取 $T^* > T$, 使得

$$\int_{-\infty}^{-(T^*-T)} h(s)|\varphi|^{[s,0]} \mathrm{d}s \leqslant B$$

与

$$\int_{-\infty}^{-(T^*-T)} h(s) \mathrm{d}s \leqslant \frac{B}{|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,\sigma+T]}}$$

同时成立. 于是, 当 $t \geqslant \sigma + T^*$ 时有

$$|x_t(\sigma,\varphi)|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]} \mathrm{d}s$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} + \int_{-(t-\sigma)}^{-(T^*-T)} + \int_{-(T^*-T)}^{0} \right) h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]} \mathrm{d}s.$$

由

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\
\leqslant &\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\left[|\varphi|^{[s+(t-\sigma),0]}+|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,\sigma+t]}\right]\mathrm{d}s\\
\leqslant &\int_{-\infty}^{-(T^*-T)} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s+\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\left[|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,\sigma+T]}+|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma+T,t]}\right]\mathrm{d}s\\
\leqslant &B+B+lB=(2+l)B
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\int_{-(t-\sigma)}^{-(T^*-T)} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s &\leqslant \int_{-(t-\sigma)}^{-(T^*-T)} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[-(t-\sigma),0]}\mathrm{d}s\\
&=|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,t]}\cdot\int_{-(t-\sigma)}^{-(T^*-T)} h(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant\left(|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,\sigma+T]}+|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma+T,t]}\right)\cdot\int_{-\infty}^{-(T^*-T)} h(s)\mathrm{d}s\\
&\leqslant B+Bl=(1+l)B
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\int_{-(T^*-T)}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s &\leqslant \int_{-(T^*-T)}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[-(T^*-T),0]}\mathrm{d}s\\
&\leqslant \int_{-(T^*-T)}^{0} h(s)\mathrm{d}s\cdot|x_t(\sigma,\varphi)|^{[-(t-(\sigma+T)),0]}\\
&= \int_{-(T^*-T)}^{0} h(s)\cdot|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma+T,t]}\mathrm{d}s\leqslant Bl
\end{aligned}
$$

得

$$|x_t(\sigma,\varphi)|_h\leqslant(2+l)B+(1+l)B+lB=3(l+1)B:=B_1.$$

充分性得证. 定理证毕. ■

定理 2.7.5　如果方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度最终有界的, 则它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度最终有界的. 如果 $h(s)$ 满足

$$h(s-\beta)\leqslant M(\beta)h(s),\quad \beta\in\mathbb{R}^+,\ s\in\mathbb{R}^- \tag{2.7.3}$$

且

$$M(\beta) \to 0, \quad \beta \to +\infty,$$

则如果方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度最终有界的, 则它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 等度最终有界的.

证明 定理第一部分的证明与定理 2.7.4 必要性的证明类似, 此处从略. 下面证明定理的第二部分.

若方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 等度最终有界的, 即存在 $B > 0$, 使得对任意的 $\sigma \geqslant 0$, $H > 0$, 存在 $T = T(\sigma, H) > 0$, 当 $|\varphi|_h \leqslant H$, $t \geqslant \sigma + T$ 时有

$$|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant B.$$

又解函数集合 $S = \{x(\sigma, \varphi)(t) | \; |\varphi|_h \leqslant H\}$ 在区间 $[\sigma, \sigma + T]$ 上关于 φ 是一致有界的, 即存在 $B_1 = B_1(\sigma, H) > 0$, 使得只要 $|\varphi|_h \leqslant H$ 就有

$$|x(\sigma, \varphi)|^{[\sigma, \sigma+T]} \leqslant B_1.$$

由 $M(\beta) \to 0$ $(\beta \to +\infty)$ 知存在 $T^* > T$, 使得当 $t \geqslant \sigma + T + T^*$ 时有

$$M(t - (\sigma + T)) \leqslant \min\left\{\frac{B}{H}, \frac{B}{B_1}, B\right\}.$$

于是, 当 $t \geqslant \sigma + T^*$ 时有

$$\begin{aligned}
|x_t(\sigma, \varphi)|_h = & \int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t(\sigma, \varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
= & \left(\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} + \int_{-(t-\sigma)}^{-(t-(T+\sigma))} + \int_{-(t-(T+\sigma))}^{0} \right) h(s)|x_t(\sigma, \varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)|x_t(\sigma, \varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \leqslant & \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)[|\varphi|^{[s+(t-\sigma),0]} + |x(\sigma, \varphi)|^{[\sigma,t]}]\mathrm{d}s \\
\leqslant & \int_{-\infty}^{0} h(s-(t-\sigma))|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
& + \int_{-\infty}^{-(t-\sigma)} h(s)\mathrm{d}s \cdot [|x(\sigma, \varphi)|^{[\sigma, \sigma+T]} + |x(\sigma, \varphi)|^{[\sigma+T,t]}] \\
\leqslant & M(t-\sigma)|\varphi|_h + \int_{-\infty}^{0} h(s-(t-\sigma))\mathrm{d}s[B_1 + B]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{B}{H}H + M(t-\sigma)l[B_1 + B] \\
&\leqslant B + l\frac{B}{B_1}B_1 + lB^2 = B(1 + l + lB)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\int_{-(t-\sigma)}^{-(t-(T+\sigma))} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
\leqslant &\int_{-T}^{0} h(s-(t-(\sigma+T)))|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,t]}\mathrm{d}s \\
\leqslant &\int_{-T}^{0} h(s)M(t-(\sigma+T))|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma,\sigma+T]}\mathrm{d}s + \int_{-T}^{0} h(s)M(t-(\sigma+T))|x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma+T,t]}\mathrm{d}s \\
\leqslant &M(t-(\sigma+T))(B_1 l + Bl) \leqslant Bl(B+1)
\end{aligned}
$$

及

$$
\int_{-(t-(\sigma+T))}^{0} h(s)|x_t(\sigma,\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s = \int_{-(t-(\sigma+T))}^{0} h(s)\mathrm{d}s \cdot |x(\sigma,\varphi)|^{[\sigma+T,t]} \leqslant Bl
$$

得

$$
|x_t(\sigma,\varphi)|_h \leqslant B(1+3l+3lB) := B^*.
$$

定理证毕. ∎

定理 2.7.6 如果方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致最终有界的, 则它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的. 如果条件 (2.7.3) 成立, 则由方程 (2.7.1) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的, 可推得它也是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 一致最终有界的.

证明与定理 2.7.5 的证明完全类似, 此处从略.

注 2.7.1 如果取 $h(s) = \mathrm{e}^s$, 则有

$$
\int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s = 1 < \infty, \quad h(s-\beta) = \mathrm{e}^{-\beta}\mathrm{e}^s,\ s \in \mathbb{R}^-,\ \beta \in \mathbb{R}^+.
$$

令 $M(\beta) = \mathrm{e}^{-\beta}$ 有 $M(\beta) \to 0\ (\beta \to \infty)$, 于是在相应的 $\mathscr{C}_h$ 空间中, 定理 2.7.5 和定理 2.7.6 成立.

下面研究更为一般的容许空间对中解的有界性之间的等价关系[55]. 首先给出容许空间对中解的有界性的定义.

定义 2.7.1 设 $(X, |\cdot|_X), (Y, |\cdot|_Y)$ 均为容许空间且 $X < Y$, 称方程 (2.6.1) 的解在 (X, Y) 中

(1) 有界, 如果对任意 $\sigma \geqslant 0, \varphi \in X$, 存在 $B = B(\sigma, \varphi)$, 使得当 $t \geqslant \sigma$ 时有 $|x_t(\sigma, \varphi)|_Y \leqslant B$;

(2) 等度有界, 如果对任意 $\sigma \geqslant 0, H > 0$, 存在 $B = B(\sigma, H) > 0$, 使得当 $|\varphi|_X \leqslant H, t \geqslant \sigma$ 时有 $|x_t(\sigma, \varphi)|_Y \leqslant B$;

(3) 一致有界, 如果等度有界定义中, $B = B(H) > 0$ 与 σ 的选取无关;

(4) 最终有界, 如果存在常数 $B > 0$, 对任意的 $\sigma \geqslant 0, \varphi \in X$, 存在 $T = T(\sigma, \varphi) > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma + T$ 时有 $|x_t(\sigma, \varphi)|_Y \leqslant B$;

(5) 等度最终有界, 如果存在常数 $B > 0$, 对任意的 $\sigma \geqslant 0, H > 0$, 存在 $T = T(\sigma, H) > 0$, 使得当 $|\varphi|_X \leqslant H, t \geqslant \sigma + T$ 时有 $|x_t(\sigma, \varphi)|_Y \leqslant B$;

(6) 一致最终有界, 如果等度最终有界定义中, $T = T(H) > 0$ 与 σ 的选取无关.

文献 [55] 证明了以下定理:

定理 2.7.7 设 $X_i, Y_i (i = 1, 2)$ 都是容许空间且 $X_2 < X_1 < Y_1 < Y_2$, 则 (X_1, Y_1) 中的有界性蕴含了 (X_2, Y_2) 中相同类型的有界性.

推论 2.7.1 设 X 是容许空间, (2.6.1) 的解在 (X, X) 中的有界性蕴含了其在 $(X, \mathbb{R}^n)$ 中的相同类型的有界性.

定理 2.7.8 设 X 是容许空间, 且具有衰减记忆, 则 (2.6.1) 的解在 $(X, \mathbb{R}^n)$ 中的有界性蕴含了其在 (X, X) 中的相同类型的有界性.

2.8 对 Volterra 积分微分方程的应用

Volterra 积分微分方程是典型的泛函微分方程, 在许多实际领域中都有重要应用. 本节考虑如下形式的滞后型 Volterra 积分微分方程:

$$x' = A(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t, s, x(s))\mathrm{d}s + f(t), \tag{2.8.1}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n, A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 连续, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 连续且存在非负连续函数 $h : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ 满足 $\int_{-\infty}^{0} h(s)ds = l < +\infty$, 及连续函数 $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 使得对任意 $t \in \mathbb{R}^+, s \leqslant t$ 及任意 $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n$ 有

$$|C(t, s, x_1) - C(t, s, x_2)| \leqslant E(t)h(s - t)|x_1 - x_2| \tag{2.8.2}$$

且 $C(t, s, 0) \equiv 0$. 又设 $A(t, x)$ 对 x 满足局部 Lipschitz 条件. 对上面的函数 $h(s)$, 定义 $\mathscr{C}_h$ 空间.

引理 2.8.1 泛函

$$F(t,\varphi)=A(t,\varphi(0))+\int_{-\infty}^{0}C(t,t+s,\varphi(s))\mathrm{d}s+f(t)$$

在 $\mathbb{R}^+\times\mathscr{C}_h$ 上连续且满足条件 (1.1.2).

证明　若 $\varphi\in\mathscr{C}_h$, 则

$$\left|\int_{-\infty}^{0}C(t,t+s,\varphi(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant E(t)\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s<+\infty,$$

故 $F(t,\varphi)$ 有定义. 对任意 $(t_1,\varphi_1),(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathscr{C}_h$ 有

$$\begin{aligned}|F(t_1,\varphi_1)-F(t,\varphi)|\leqslant&|A(t_1,\varphi_1(0))-A(t,\varphi(0))|\\&+\int_{-\infty}^{0}|C(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))-C(t,t+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s\\\leqslant&|A(t_1,\varphi_1(0))-A(t,\varphi(0))|\\&+\int_{-\infty}^{0}|C(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))-C(t_1,t_1+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s\\&+\int_{-\infty}^{0}|C(t_1,t_1+s,\varphi(s))-C(t,t+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s\\:=&|A(t_1,\varphi_1(0))-A(t,\varphi(0))|+I_1+I_2.\end{aligned}$$

设 t_1,φ_1 固定, 如果 $|t-t_1|+|\varphi-\varphi_1|_h\to0$, 易见 $|\varphi_1(0)-\varphi(0)|\to0$, 故有

$$|A(t_1,\varphi_1(0))-A(t,\varphi(0))|\to0.$$

又由 (2.8.2) 有

$$I_1\leqslant E(t_1)\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi_1(s)-\varphi(s)|\mathrm{d}s\leqslant E(t_1)|\varphi_1-\varphi|_h.$$

故当 $|\varphi-\varphi_1|_h\to0$ 时, $I_1\to0$. 因为

$$\begin{aligned}|C(t_1,t_1+s,\varphi(s))-C(t,t+s,\varphi(s))|\leqslant&|C(t_1,t_1+s,\varphi(s))|+|C(t,t+s,\varphi(s))|\\\leqslant&(E(t_1)+E(t))h(s)|\varphi(s)|.\end{aligned}$$

当 $|t-t_1|$ 充分小时有 $E(t_1)+E(t)\leqslant3E(t_1)$, 而

$$\int_{-\infty}^{0}3E(t_1)h(s)|\varphi(s)|\mathrm{d}s\leqslant3E(t_1)|\varphi|_h<+\infty.$$

故由控制收敛定理知当 $|t-t_1|\to 0$ 时, $I_2\to 0$. 综上所述, $F(t,\varphi)$ 在 $\mathbb{R}^+\times\mathscr{C}_h$ 中连续.

对 (t,φ_1), $(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathscr{C}_h$ 有

$$\begin{aligned}|A(t,\varphi_1(0))-A(t,\varphi(0))|&\leqslant L|\varphi_1(0)-\varphi(0)|\\&\leqslant Ll^{-1}\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi_1(0)-\varphi(0)|\mathrm{d}s\\&\leqslant Ll^{-1}|\varphi_1-\varphi|_h\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{0}C(t,t+s,\varphi_1(s))\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{0}C(t,t+s,\varphi(s))\mathrm{d}s\right|\\\leqslant&\int_{-\infty}^{0}|C(t,t+s,\varphi_1(s))-C(t,t+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s\\\leqslant&\int_{-\infty}^{0}E(t)h(s)|\varphi_1(s)-\varphi(s)|\mathrm{d}s\leqslant E(t)|\varphi_1-\varphi|_h.\end{aligned}$$

故有

$$|F(t,\varphi_1)-F(t,\varphi)|\leqslant(Ll^{-1}+E(t))|\varphi_1-\varphi|_h,$$

这里 L 是 $A(t,x)$ 的 Lipschitz 常数, 因此 (1.1.2) 满足. 证毕. ∎

本节内容主要取自参考文献 [147].

2.8.1 Volterra 积分微分方程解的有界性

方程 (2.8.1) 的线性特例为

$$x'(t)=A(t)x(t)+\int_{-\infty}^{t}C(t,s)x(s)\mathrm{d}s+f(t),\tag{2.8.3}$$

其中, $A(t)$ 和 $C(t,s)$ 分别为定义在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的连续 $n\times n$ 矩阵函数, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 连续. 本节考虑线性方程 (2.8.3) 的解的有界性.

引理 2.8.2 设存在非负连续函数 $h:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$ 及 $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得

$$\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s<\infty,\quad |C(t,s)|\leqslant E(t)h(s-t)$$

且

$$\int_{t}^{+\infty}E(u)\mathrm{d}u\leqslant a<+\infty,\quad \lim_{t\to+\infty}\int_{t}^{+\infty}E(u)\mathrm{d}u=0,$$

则泛函

$$V(t,x_t)=|x(t)|+k\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|C(u,s)||x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,\quad k>0$$

为 h 一致健忘的 (见定义 2.2.7).

证明　首先易证

$$|x(t)|\leqslant V(t,x_t)\leqslant |x(t)|+ka|x_t|_h.$$

对任意 $\sigma>0$, $R>0$, 存在 $S>0$, 使得当 $t-\sigma\geqslant S$ 时有

$$k\int_{t}^{+\infty}E(u)\mathrm{d}u\leqslant\frac{\sigma}{R},$$

则当 $t\geqslant\sigma+S$, $|x_\sigma|_h\leqslant R$ 时有

$$\begin{aligned}V(t,x_t)&=|x(t)|+k\int_{t}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\sigma}|C(u,s)||x(s)|\mathrm{d}s+\int_{\sigma}^{t}|C(u,s)||x(s)|\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}u\\&\leqslant|x(t)|+\sigma+kal|x|^{[\sigma,t]},\end{aligned}$$

从而 $V(t,x_t)$ 是一致健忘的. ∎

定理 2.8.1　如果引理 2.8.2 的条件成立且

(1) 存在 $1<k<2$ 及 $\delta>0$, 使得

$$(2-k)\big|A(t)\big|+k\int_{t}^{+\infty}|C(u,t)|\mathrm{d}u<-\delta;$$

(2) $al<2(1-k^{-1})$;

(3) $f(t)$ 有界,

则方程 (2.8.3) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界和 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.

证明　令

$$V(t,x_t)=|x(t)|+k\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|C(u,s)||x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,\quad k>0,$$

$W_1(r)=W_2(r)=r$, $W_3(r)=kar$, $W(r)=(k-1)r$. 由引理 2.8.2 知 $V(t,x_t)$ 是 h 一致健忘的且满足定理 2.2.1 的条件 (1). 再证定理 2.2.1 的条件 (2), (3) 也成立即可. 事实上,

$$V'_{(2.8.3)}(t,x_t)\leqslant\big|A(t)\big||x(t)|+\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s+|f(t)|$$

$$
\begin{aligned}
&+k\int_t^{+\infty}|C(u,t)||x(t)|\mathrm{d}u-k\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s\\
\leqslant&\left\{\left[|A(t)|+k\int_t^{+\infty}|C(u,t)|\mathrm{d}u\right]|x(t)|\right.\\
&\left.+(1-k)[|x'(t)|-|A(t)||x(t)|-|f(t)|]\right\}+|f(t)|\\
=&\left[(2-k)|A(t)|+k\int_t^{+\infty}|C(u,t)|\mathrm{d}u\right]|x(t)|+(1-k)|x'(t)|+k|f(t)|\\
\leqslant&-\delta|x(t)|+(1-k)||x(t)|'|+k|f(t)|.
\end{aligned}
$$

易于验证, 定理 2.2.2 的所有条件均满足, 故方程 (2.8.3) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界且 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界. 证毕. ∎

本节内容主要取自文献 [165, 166].

2.8.2 Volterra 积分微分方程解的稳定性

本节先考虑线性方程 (2.8.3) 的解的渐近稳定性问题.

定理 2.8.2 设 $f(t)\equiv 0$ 且引理 2.8.2 条件成立, 此外,

(1) $h(s)$ 满足定理 2.1.3 的条件;

(2) 存在连续函数 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^-,\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, 使得

$$
x^{\mathrm{T}}A(t)x\leqslant\alpha(t)|x|,\ |A(t)x|\leqslant\beta(t)|x|,\quad x\in\mathbb{R}^n;
$$

(3) 存在 $1<k<2$ 及 $\delta>0$, 使得

$$
\alpha(t)+(k-1)\beta(t)+k\int_t^{+\infty}|C(u,t)|\mathrm{d}u\leqslant-\delta;
$$

(4) $alk<2(k-1)$,

则方程 (2.8.3) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

证明 由条件 (1) 知空间 $\mathscr{C}_h$ 是容许的且具衰减记忆. 构造 V 泛函如下:

$$
V(t,x_t)=|x(t)|+k\int_{-\infty}^{t}\int_t^{+\infty}|C(u,s)||x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,\quad k>0.
$$

由引理 2.8.2 知 $V(t,\varphi)$ 是 h 一致健忘的. 容易验证

$$
|x(t)|\leqslant V(t,x_t)\leqslant|x(t)|+ka|x_t|_h.
$$

设 D_t 表示对 t 取上右导数有

$$\begin{aligned}D_t|x(t)| &= D_t[x^{\mathrm{T}}(t)x(t)]^{1/2} \\ &= \frac{(x'(t))^{\mathrm{T}}x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)x'(t)}{2|x(t)|} = \frac{x^{\mathrm{T}}(t)x'(t)}{|x(t)|} \\ &= \frac{x^{\mathrm{T}}(t)A(t)x(t)}{|x(t)|} + \frac{x^{\mathrm{T}}(t)}{|x(t)|}\int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \alpha(t)|x(t)| + \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}V'_{(2.8.3)}(t,x_t) \leqslant{}& \alpha(t)|x(t)| + \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s \\ & -k\int_{-\infty}^{t} |C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s + k\int_{t}^{+\infty} |C(u,t)||x(t)|\mathrm{d}u \\ \leqslant{}& \left[\alpha(t) + k\int_{t}^{+\infty} |C(u,t)|\mathrm{d}u\right]|x(t)| + (1-k)[|x'(t)| - |A(t)x(t)|] \\ \leqslant{}& \left[\alpha(t) + (k-1)\beta(t) + k\int_{t}^{+\infty} |C(u,t)|\mathrm{d}u\right]|x(t)| + (1-k)|x'(t)| \\ \leqslant{}& -\delta|x(t)| - (k-1)||x(t)|'|.\end{aligned}$$

故可取 $W_1(r) = W_2(r) = r$, $W_3(r) = kar$, $W_4(r) = \delta r$, $W(r) = (k-1)r$. 容易验证定理 2.3.1 的条件完全满足, 从而本定理得证. ■

下面考虑非线性方程 (2.8.1) 的稳定性问题. 设 $f(t) \equiv 0$, 并设条件 (2.8.2) 中的函数 $E(t)$ 是有界的, 不妨设 $|E(t)| \leqslant 1$.

定理 2.8.3　如果条件 (2.8.2) 成立且有

(1) $\int_{t}^{+\infty} h(t-u)\mathrm{d}u \leqslant M_1,\ t \geqslant 0$;

(2) 存在 $K > 0$, 使得

$$\int_{t}^{+\infty} h(s-u)\mathrm{d}u \leqslant Kh(s-t), \quad t \geqslant 0 \geqslant s;$$

(3) 存在常数 $\beta > M_1$, 使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$ 有

$$(x-y)^{\mathrm{T}}[A(t,x)-A(t,y)] \leqslant -\beta|x-y|^2,$$

则方程 (2.8.1) 的零解是全局渐近稳定的.

证明 由已知条件, 由 h 所构成的 $\mathscr{C}_h$ 空间是容许的且具衰减记忆的. 选取 J 满足 $1 < J < \beta/M_1$. 构造泛函如下:

$$\begin{aligned} V(t,x_t,y_t) &= |x(t)-y(t)| + J\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty} h(t+s-u)|x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\ &= |x(t)-y(t)| + J\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} h(s-u)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)| &\leqslant V(t,x_t,y_t) \\ &\leqslant |x(t)-y(t)| + \int_{-\infty}^{t} Kh(s-t)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant |x(t)-y(t)| + K|x_t-y_t|_h, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

设 (2.8.1) 的伴随系统为

$$\begin{cases} x'(t) = A(t,x(t)) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} C(t,s,x(s))\mathrm{d}s, \\ y'(t) = A(t,y(t)) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} C(t,s,y(s))\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2.8.4}$$

则有

$$\begin{aligned} V'_{(2.8.4)}(t,x_t,y_t) \leqslant & \frac{(x(t)-y(t))^{\mathrm{T}}(x'(t)-y'(t))}{|x(t)-y(t)|} \\ & + J\int_{t}^{+\infty} h(t-u)|x(t)-y(t)|\mathrm{d}u - J\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s \\ \leqslant & \frac{(x(t)-y(t))^{\mathrm{T}}}{|x(t)-y(t)|}[A(t,x(t))-A(t,y(t))] \\ & + \frac{(x(t)-y(t))^{\mathrm{T}}}{|x(t)-y(t)|}\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s \\ & + JM_1|x(t)-y(t)| - J\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant -(\beta - JM_1)|x(t)-y(t)| - (J-1)\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant -(\beta - JM_1)|x(t)-y(t)| - \frac{J-1}{K}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} h(s-u)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
&\leqslant -\omega V(t,x_t,y_t), \quad t \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\omega = \min\{\beta - JM_1, (J-1)(KJ)^{-1}\}.
$$

由定理 1.3.1 知方程 (2.8.1) 是强非常稳定的, 因而其零解为全局渐近稳定的. ∎

定理 2.8.4　*如果 $f(t) \equiv 0$ 且*

(1) 存在连续函数 $h: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ 和 $E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, 使得

$$
|C(t,s)| \leqslant E(t)h(s-t), \qquad \int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s = l < \infty,
$$

$$
\int_{t}^{+\infty} E(u)\mathrm{d}u \leqslant a < +\infty, \quad t \in \mathbb{R}^+;
$$

(2) 对 $t \geqslant 0$, $A(t)$ 和 $E(t)$ 有界;

(3) 存在连续函数 $M(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 使得

$$
h(s-t) \leqslant M(t)h(s), \quad t \geqslant 0 \geqslant s, \ \lim_{t\to+\infty} M(t) = 0;
$$

(4) 存在连续函数 $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$, 使得

$$
x^T A(t)x \leqslant \alpha(t)|x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n;
$$

(5) 存在常数 $\delta > 0$, 使得

$$
\alpha(t) + \int_{t}^{+\infty} |C(u,t)|\mathrm{d}u \leqslant -\delta,
$$

则方程 (2.8.3) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

证明　由条件 (3) 和定理 2.1.3 知由函数 $h(s)$ 所产生的 $\mathscr{C}_h$ 空间是容许的且具有衰减记忆. 易见方程 (2.8.3) 的右端泛函在 $\mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h$ 中连续且满足定理 1.2.3 的条件 (iii). 令

$$
V(t,x_t) = |x(t)| + \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} |C(u,s)||x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,
$$

有

$$|x(t)| \leqslant V(t,x_t) \leqslant |x(t)| + \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} E(u)h(s-u)|x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$
$$\leqslant |x(t)| + aM|x_t|_h \leqslant (aM + l^{-1})|x_t|_h,$$

其中, $M = \sup\limits_{t\geqslant 0} M(t)$. 还有

$$(|x(t)|)'|_{(2.8.3)} = ((x^{\mathrm{T}}(t)x(t))^{1/2})' = \frac{(x'(t))^{\mathrm{T}}x(t) + x^{\mathrm{T}}(t)x'(t)}{2|x(t)|}$$
$$= \frac{x^{\mathrm{T}}(t)x'(t)}{|x(t)|} = \frac{x^{\mathrm{T}}(t)A(t)x(t)}{|x(t)|} + \frac{x^{\mathrm{T}}(t)}{|x(t)|}\int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \alpha(t)|x(t)| + \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s.$$

由此得

$$V'_{(2.8.3)}(t,x_t) \leqslant \alpha(t)|x(t)| + \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s$$
$$+ \int_{t}^{+\infty} |C(u,t)||x(t)|\mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \left[\alpha(t) + \int_{t}^{+\infty} |C(u,t)|\mathrm{d}u\right]|x(t)| \leqslant -\delta|x(t)|.$$

取 $W_1(r) = r$, $W_2(r) = (aM + l^{-1})r$, $W_3(r) = \delta r$, 由定理 1.2.3 即得到定理结论. ∎

定理 2.8.5 *如果方程 (2.8.3) 是纯量方程, $f(t) \equiv 0$ 且定理 2.8.4 的条件 (1), (2) 和 (3) 成立, 又 $C(t,s) = C(t-s) \geqslant 0, A(t) \equiv A$, 则方程 (2.8.3) 的零解为 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的充要条件是*

$$A + \int_{0}^{+\infty} C(u)\mathrm{d}u < 0. \tag{2.8.5}$$

证明 如果 (2.8.5) 成立, 则由定理 1.2.3 知方程 (2.8.3) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

如果 (2.8.5) 不成立, 则 $A + \int_0^{+\infty} C(u)\mathrm{d}u \geqslant 0$. 如果 $A + \int_0^{+\infty} C(u)\mathrm{d}u = 0$, 则易见 $x(t) \equiv c$ 是方程 (2.8.3) 的满足初值条件 $x_0 = \varphi \equiv c$ 的解. 因此, 方程 (2.8.3) 的零解不是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的. 如果 $A + \int_0^{+\infty} C(u)\mathrm{d}u > 0$, 往证如果 $\varphi(s) \equiv c > 0$, 则存在 $0 < \delta < c$, 使得 $|x(0,\varphi)(t)| \geqslant \delta,\ t \geqslant 0$. 用反证法. 假如存在 $t_1 > 0$, 使

得 $|x(0,\varphi)(t_1)| < \delta$, 则存在 $t_2 \in [0,t_1]$, 使得 $|x(0,\varphi)(t_2)| = \delta$, $|x(0,\varphi)(t)| > \delta$, $t \in [0,t_2]$. 因此有 $x'(0,\varphi)(t_2) \leqslant 0$. 另一方面, 有

$$\begin{aligned} x'(0,\varphi)(t_2) &= Ax(0,\varphi)(t_2) + \int_{-\infty}^{t_2} C(t_2-s)x(0,\varphi)(s)\mathrm{d}s \\ &\geqslant \left[A + \int_0^{+\infty} C(u)\mathrm{d}u\right]\delta > 0. \end{aligned}$$

矛盾! 证毕. ∎

考虑具有无界时滞的卷积型 Volterra 方程

$$x'(t) = Ax(t) + \int_0^t c(t-s)x(s)\mathrm{d}s \tag{2.8.6}$$

和具有无限时滞的卷积型 Volterra 方程

$$x'(t) = Ax(t) + \int_{-\infty}^t c(t-s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{2.8.7}$$

由于紧致性的原因, 在研究一致渐近稳定性时, 方程 (2.8.6) 往往要比方程 (2.8.7) 易于处理, 现有的很多结果都是针对方程 (2.8.6) 的 (如文献 [11, 15, 122]), 下面介绍文献 [149] 的结果, 证明方程 (2.8.6) 和 (2.8.7) 的一致渐近稳定性是等价的.

下面讨论中所涉及的相空间均为有界连续函数空间, A 为 $n \times n$ 常数矩阵, $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 为 $n \times n$ 矩阵函数, $c \in L(\mathbb{R}^+)$.

引理 2.8.3 [122]　*方程 (2.8.6) 的零解是一致渐近稳定的当且仅当 (2.8.6) 的所有定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的解都属于 $L^1(\mathbb{R}^+)$.*

定理 2.8.6　*若方程 (2.8.6) 的零解是一致渐近稳定的, 则方程 (2.8.7) 的零解也是一致渐近稳定的.*

证明　设 $y(t) = y(t,0,\varphi)$ 为方程 (2.8.7) 的满足初始条件 $y(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in \mathbb{R}^-$ 的解, 其中, $\varphi \in BC(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^n)$, 则有

$$y'(t) = Ay(t) + \int_0^t c(t-s)y(s)\mathrm{d}s + \int_{-\infty}^0 c(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

由常数变易公式 [17] 有

$$y(t) = X(t)\varphi(0) + \int_0^t X(t-u)\int_{-\infty}^0 c(u-s)\varphi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u, \tag{2.8.8}$$

其中, $X(t)$ 为方程 (2.8.6) 满足 $X(0)=I$(单位阵) 的基本解矩阵. 由 (2.8.8) 得到

$$|y(t)| \leqslant \left[|X(t)| + \int_0^t |X(t-u)| \int_{-\infty}^0 |c(u-s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right] |\varphi|^{\mathbb{R}^-} := G(t)|\varphi|^{\mathbb{R}^-}. \quad (2.8.9)$$

因为 $c \in L(\mathbb{R}^+)$, 故

$$\int_{-\infty}^0 |c(u-s)|\mathrm{d}s = \int_u^{+\infty} |c(r)|\mathrm{d}r \to 0, \quad u \to +\infty.$$

又因为方程 (2.8.6) 的零解是一致渐近稳定的, 故 $\lim\limits_{t\to+\infty} |X(t)| = 0$, 此外由引理 2.8.3 知 $X \in L^1(\mathbb{R}^+)$, 所以 $\int_0^t |X(t-u)| \int_{-\infty}^0 |c(u-s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u$ 是一个 L^1 函数和一个无穷小的卷积, 从而它本身也是一个无穷小, 因而有 $\lim\limits_{t\to+\infty} G(t) = 0$. 由 (2.8.9) 知若 $|\varphi|^{\mathbb{R}^-} \leqslant H$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 使得当 $t \geqslant T$ 时有 $|y(t)| \leqslant \varepsilon$.

设 $z(t) = z(t, t_0, \varphi)$ 是方程 (2.8.7) 满足初始条件 $z(\theta) = \varphi(\theta), \theta \leqslant t_0, t_0 \in \mathbb{R}, \varphi \in BC((-\infty, t_0], \mathbb{R}^n)$ 的解. 定义 $t = \tau + t_0, w(\tau) = z(\tau + t_0, t_0, \varphi)$. 容易验证 $w(\tau) = z(\tau, 0, \varphi^*)$, 其中, $\varphi^*(\theta) = \varphi(\theta + t_0) \in BC(\mathbb{R}^-, \mathbb{R}^n)$ 且 $|\varphi^*|^{\mathbb{R}^-} = |\varphi|^{(-\infty, t_0]}$, 因而由前面结果知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 使得当 $\tau \geqslant T$ 时有 $|w(\tau)| \leqslant \varepsilon$, 即当 $t \geqslant t_0 + T$ 时, $|z(t, t_0, \varphi)| \leqslant \varepsilon$, 这里 T 与 t_0 无关. 用同样方法, 不难证明方程 (2.8.7) 的零解是一致稳定的, 从而它是一致渐近稳定的. ■

引理 2.8.4 设 $f_n(t) = \int_t^{t+a/n} |C(s)|\mathrm{d}s, t \geqslant 0, a > 0$ 为常数, $n = 1, 2, \cdots$ 且 $C \in L^1(\mathbb{R}^+)$, 则 $f_n(t)$ 一致趋近于零.

定理 2.8.7 若方程 (2.8.7) 的零解是一致渐近稳定的, 则方程 (2.8.6) 的零解也是一致渐近稳定的.

证明 设 $\sigma \geqslant 0, \varphi \in C([0, \sigma], \mathbb{R}^n)$, $x(t) = x(t, \sigma, \varphi)$ 是 (2.8.6) 的满足 $x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [0, \sigma]$ 的解. 首先设 $\varphi(0) \neq 0$. 定义

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0, \sigma], \\ \psi_n(t), & t \in \left(-\dfrac{1}{n}|\varphi(0)|, 0\right), \\ 0, & t \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{n}|\varphi(0)|\right], \end{cases}$$

其中,

$$\psi_n(t) = \frac{n\varphi(0)t}{|\varphi(0)|} + \varphi(0).$$

显然 $\varphi_n \in BC((-\infty,\sigma],\mathbb{R}^n)$ 且 $|\varphi_n|^{(-\infty,\sigma]} = |\varphi|^{[0,\sigma]}$. 设 $y_n(t) = y(t,\sigma,\varphi_n)$ 为方程 (2.8.7) 的满足 $y(\theta) = \varphi_n(\theta), \theta \leqslant \sigma$ 的解. 设 $z(t) = x(t+\sigma), w_n(t) = y_n(t+\sigma), u_n(t) = w_n(t) - z(t)$. 容易验证, $u_n(t)$ 是方程

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t c(t-s)u(s)\mathrm{d}s + F_n(t), \quad u(0) = 0$$

的解, 其中,

$$F_n(t) = \int_{-\sigma-\frac{1}{n}|\varphi(0)|}^{-\sigma} c(t-s)\varphi_n(s+\sigma)\mathrm{d}s.$$

又因为

$$|F_n(t)| \leqslant |\varphi|^{[0,\sigma]} \int_{t+\sigma}^{t+\sigma+\frac{1}{n}|\varphi(0)|} |c(s)|\mathrm{d}s.$$

由引理 2.8.4 知 $F_n(t), t \geqslant 0$ 一致趋近于零, 因而对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n \geqslant N$ 时有 $|F_n(t)| \leqslant \varepsilon,\ t \geqslant 0$, 从而有

$$|u_n(t)| \leqslant \int_0^t |z(t-s)||F_n(s)|\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon \int_0^t |z(t-s)|\mathrm{d}s = \varepsilon \int_0^t |z(s)|\mathrm{d}s.$$

由此易证, 在 $\mathbb{R}^+$ 的任意紧致子集上, $u_n(t)$ 一致收敛于零.

因为方程 (2.8.7) 的零解是一致渐近稳定的, 故存在 $H > 0$, 对任意 $\sigma \in \mathbb{R}$, $\psi \in BC((-\infty,\sigma],\mathbb{R}^n)$ 满足 $|\psi|^{(-\infty,\sigma]} \leqslant H$ 及任意给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $T(\varepsilon) > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma + T$ 时有 $|y(t,\sigma,\psi)| \leqslant \varepsilon$, 这里 $y(t,\sigma,\psi)$ 表示方程 (2.8.7) 的满足 $y(\theta) = \psi(\theta), \theta \leqslant \sigma$ 的解.

现在证明, 若 $\varphi \in C([0,\sigma],\mathbb{R}^n), \varphi(0) \neq 0, |\varphi|^{[0,\sigma]} \leqslant H$, 则当 $t \geqslant \sigma + T$ 时有 $|x(t,\sigma,\varphi)| \leqslant \varepsilon$.

构造解 $z(t), w_n(t), u_n(t)$ 如前. 前面已经证明在 $\mathbb{R}^+$ 的任意紧致子集上, $u_n(t)$ 一致收敛于零, 即 $w_n(t)$ 一致收敛于 $z(t)$, 从而在 $\mathbb{R}^+$ 的任意紧致子集上, $y_n(t)$ 一致收敛于 $x(t) = x(t,\sigma,\varphi)$. 因为 $|\varphi_n|^{(-\infty,\sigma]} = |\varphi|^{[0,\sigma]} \leqslant H$, 故当 $t \geqslant \sigma + T$ 时有 $|y_n(t)| \leqslant \varepsilon$. 如果存在 $t_1 \geqslant \sigma + T$, 使得 $|x(t_1)| = \delta > \varepsilon$, 则有

$$|y_n(t_1) - x(t_1)| \geqslant |x(t_1)| - |y_n(t_1)| \geqslant \delta - \varepsilon > 0.$$

这与在 $[\sigma, t_1+1]$ 上 $y_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$ 矛盾. 于是证明了: 若 $\varphi(0) \neq 0, |\varphi|^{[0,\sigma]} \leqslant H$, 则 $|x(t)| \leqslant \varepsilon, t \geqslant \sigma + T$.

若 $\varphi(0) = 0$, 则 $x(t,\sigma,\varphi)$ 可以看成是 $y(t,\sigma,\varphi^*)$, 这里 $y(t,\sigma,\varphi^*)$ 为方程 (2.8.7) 的满足 $y(\theta) = \varphi^*(\theta), \theta \leqslant \sigma$ 的解. 又显然 $|\varphi^*|^{(-\infty,\sigma]} = |\varphi|^{[0,\sigma]}$, 故当 $|\varphi|^{[0,\sigma]} \leqslant H$ 时

有 $|x(t)| \leqslant \varepsilon, t \geqslant \sigma + T$. 用同样方法, 不难证明方程 (2.8.6) 的零解是一致稳定的, 从而它是一致渐近稳定的. ■

文献 [11] 研究了方程 (2.8.6) 的零解的一致渐近稳定性, 应用定理 2.8.6, 定理 2.8.7 和文献 [11] 的定理 1, 就可以得到方程 (2.8.7) 的零解的一致渐近稳定性.

定理 2.8.8 *设 $x \in \mathbb{R}$ 且 $c(t)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上保号并满足*

$$\int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t < \infty, \quad \int_0^\infty tc(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

(1) *如果 $A + \int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$, 则方程 (2.8.7) 的解不是一致渐近稳定的;*

(2) *如果 $\int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t > 0,\ A + \int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t < 0$, 则方程 (2.8.7) 的零解是一致渐近稳定的;*

(3) *如果 $\int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t < 0,\ A + \int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t < 0$, 则当 $\int_0^\infty tc(t)\mathrm{d}t \Big/ \int_0^\infty c(t)\mathrm{d}t$ 充分小时, 方程 (2.8.7) 的零解是一致渐近稳定的.*

2.8.3 Volterra 积分微分方程的周期解和概周期解

首先考虑线性方程 (2.8.3) 的周期解的存在性. 假设存在 $\omega > 0$, 使得

$$A(t+\omega) = A(t), \quad C(t+\omega, s+\omega) = C(t,s), \quad f(t+\omega) = f(t). \tag{2.8.10}$$

定理 2.8.9 *如果 (2.8.10) 和定理 2.8.1 的条件成立, 则方程 (2.8.3) 存在 ω 周期解.*

证明 由定理 2.8.1 知方程 (2.8.3) 的解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界和 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的. 再由定理 2.4.1 就完成本定理的证明. ■

定理 2.8.10 *设 (2.8.10) 和定理 2.8.2 的条件成立, 则方程 (2.8.3) 存在唯一 ω 周期解且此周期解是全局稳定的.*

证明 由定理 2.8.2 知 (2.8.3) 所对应的齐次方程的零解是渐近稳定的, 接着由定理 1.5.2 知系统 (2.8.3) 为强非常稳定的, 再由定理 1.5.1 即完成证明. ■

下面考虑一般的非线性方程 (2.8.1) 的周期解的存在性问题. 假设存在 $\omega > 0$, 使得对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathscr{C}_h$ 有

$$A(t+\omega,\varphi) = A(t,\varphi), \quad f(t+\omega) = f(t), \quad C(t+\omega, s+\omega, \varphi) = C(t,s,\varphi). \tag{2.8.11}$$

定理 2.8.11　*如果 (2.8.11) 成立且定理 2.8.3 的条件成立, 则方程 (2.8.1) 存在唯一全局稳定周期解, 其周期为 ω.*

证明　由定理 2.8.3 知系统 (2.8.1) 是强非常稳定的. 再由定理 1.5.1 即完成证明. ∎

定理 2.8.12　*设 (2.8.2) 及 (2.8.11) 成立且存在 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集 S, 使得方程 (2.8.1) 在 S 上是内向的, 则方程 (2.8.1) 存在 ω 周期解 $x = x(t)$ 且有 $x(t) \in S$.*

证明　由定理 1.4.1 直接推得, 此处从略. ∎

定理 2.8.13　*设 (2.8.2) 及 (2.8.11) 成立且对每个 $i : 1 \leqslant i \leqslant n$, 都有*

$$\lim_{x_i \to +\infty} x_i^{-1} A_i(t, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) < -lE$$

及

$$\lim_{x_i \to -\infty} x_i^{-1} A_i(t, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) < lE,$$

其中, $E = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} E(t)$, $A_i(t, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ 为 $A(t, x)$ 的第 i 个分量, 则方程 (2.8.1) 存在 ω 周期解.

证明　容易看出, 对充分大的 $M > 0$, 集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n | -M \leqslant x_i \leqslant T,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

是方程 (2.8.1) 的内向凸紧集. 由定理 1.4.1 即完成证明. ∎

例 2.8.1　方程

$$\begin{cases} x' = -5(3 + \cos y)x + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \exp\{\sin y(s) - t + s\} x(s) \mathrm{d}s + \cos t, \\ y' = -3(5 + \sin x)y + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \exp\{\cos x(s) - t + s\} y(s) \mathrm{d}s + \sin t \end{cases}$$

必存在 2π 周期解.

如果对某个满足定理 2.8.12 条件的 $f(t, \varphi)$ 能够找到 m 个互不相交的满足定理条件的凸紧集, 则易知方程 (2.8.1) 至少存在 m 个不同的 ω 周期解.

例 2.8.2　方程

$$x' = 5x \sin x + \int_{-\infty}^{t} \frac{x(s)}{1 + (s - t)^2} \mathrm{d}s + \frac{\sin t}{2 + \cos t}$$

具有无穷多个 2π 周期解. 事实上, 取

$$S_k = \left[\frac{(4k + 1)\pi}{2}, \frac{(4k + 3)\pi}{2}\right], \quad k = 1, 2, \cdots,$$

容易验证 S_k 都是方程的内向凸紧集.

例 2.8.3 方程

$$x' = 5x^2 \mathrm{e}^{-|x|} \sin 2\pi x + 0.1 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-s)} x(s) \mathrm{d}s + \cos t,$$

至少有 7 个 2π 周期解.

取 S_1=[−3.75,−3.25], S_2=[−2.75,−2.25], S_3=[−1.75,−1.25], S_4=[−0.75,0.75], S_5= [1.25,1.75], S_6=[2.25,2.75], S_7= [3.25,3.75]. 容易验证, $S_1 \sim S_7$ 都是方程的内向凸紧集.

引理 2.8.5 [96] 如果空间 $\mathscr{B}$ 是容许的具衰减记忆的, 则 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定和 $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 一致渐近稳定是等价的.

引理 2.8.6 [133] 如果空间 $\mathscr{B}$ 是具有衰减记忆的容许相空间, 则由 $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 全局一致渐近稳定性可以推出 $\mathscr{B}$-$\mathscr{B}$ 全局指数渐近稳定性.

定理 2.8.14 *设定理 2.8.4 的条件满足, 则方程 (2.8.3) 存在唯一的周期解, 其周期为 ω.*

证明 定义映射 $P : \mathscr{C}_h \to \mathscr{C}_h$ 如下:

$$P(\varphi) = x_\omega(0, \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{C}_h,$$

其中, $x(0,\varphi)(t)$ 是方程 (2.8.3) 的满足初值条件 $x_0 = \varphi$ 的解.

由定理 2.8.4, 方程 (2.8.3) 对应的齐次方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)\mathrm{d}s \tag{2.8.12}$$

的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 全局一致渐近稳定的. 再由引理 2.8.5 和引理 2.8.6 知方程 (2.8.12) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathscr{C}_h$ 全局指数渐近稳定的. 因此, 存在正整数 m, 使得对方程 (2.8.12) 的任何一个解 $y(0,\varphi)(t)$, $\varphi \in \mathscr{C}_h$ 有

$$|y_{m\omega}(0,\varphi)|_h \leqslant \frac{1}{2}|\varphi|_h.$$

于是, 显然有

$$\begin{aligned} |P^m(\varphi) - P^m(\psi)|_h =& |x_{m\omega}(0,\varphi) - x_{m\omega}(0,\psi)|_h \\ =& |y_{m\omega}(0,\varphi-\psi)|_h \leqslant \frac{1}{2}|\varphi - \psi|_h. \end{aligned}$$

此式说明映射 P^m 是压缩映射, 因此映射 P 在 $\mathscr{C}_h$ 中有不动点 $\varphi^* \in \mathscr{C}_h$. 易见 $x(0,\varphi^*)(t)$ 是方程 (2.8.3) 的 ω 周期解. 由映射 P 的不动点的唯一性可以推出方程 (2.8.3) 的周期解的唯一性. 若方程 (2.8.3) 还有一个周期解 $x(t)$, 其周期 $\omega_1 \neq \omega$, 则 $x(t) - x(0,\varphi^*)(t) \neq 0$ 是方程 (2.8.12) 的一个概周期解, 它不趋近于零. 另一方面, 已

知方程 (2.8.12) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的, 所以上述概周期解要随 $t \to +\infty$ 而趋近于零. 这个矛盾证明了方程 (2.8.3) 只有唯一的一个周期解, 其周期为 ω 且是稳定的. ∎

定理 2.8.15　设定理 2.8.4 的条件满足且

$$A(t) \equiv A, \quad C(t,s) = C(s-t), \quad f(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i(t),$$

其中, $C : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^n$ 是连续函数, $f_i : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^n$ 是连续的周期为 ω_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ 的周期函数, 则方程 (2.8.3) 有且仅有一个概周期解, 它是稳定的.

证明　考虑方程

$$x'(t) = Ax(t) + \int_{-\infty}^{t} C(s-t)x(s)ds + f_i(t). \tag{2.8.13}$$

由定理 2.8.14, 方程 (2.8.13) 有唯一的 ω_i 周期解 $x_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 由叠加原理知 $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(t)$ 是方程 (2.8.3) 的概周期解. 如果方程 (2.8.3) 还有一个概周期解 $y(t)$, $y(t) \neq x(t)$, 则 $y(t) - x(t) \neq 0$ 是方程 (2.8.12) 的一个概周期解, 它不趋近于零. 但已知方程 (2.8.12) 的零解是 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 全局一致渐近稳定的, 故上述概周期解应该趋近于零. 这个矛盾证明了 (2.8.3) 的概周期解的唯一性. ∎

例 2.8.4　方程

$$x'(t) = -\alpha x(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{s-t} x(s)\mathrm{d}s + \sin t + \sin\sqrt{2}t, \quad \alpha > 1$$

有唯一稳定的概周期解.

定义

$$\alpha(t, K) = a(t) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|\mathrm{d}s + K\int_{t}^{+\infty} |C(u,t)|\mathrm{d}u, \quad t \geqslant 0,$$

其中, $a(t)$ 满足 $x^{\mathrm{T}}A(t)x \leqslant a(t)|x|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, 而 K 为一待定正数.

定理 2.8.16　假设

(1) $A(t)$, $f(t)$ 以 $\omega > 0$ 为周期, $C(t+\omega, s+\omega) = C(t,s)$, 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 有

$$x^{\mathrm{T}}A(t)x \leqslant a(t)|x|^2;$$

(2) 存在单调增加的连续函数 $h(t) > 0$ 以及连续函数 $\eta(t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ 满足

$$\int_{0}^{+\infty} |C(u,s)|\mathrm{d}u \leqslant h(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

以及

$$l=\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s<+\infty,\quad h(t+s)\leqslant\eta(t)h(s);$$

(3) 存在常数 $k>0$, 使得

$$k\int_{t}^{+\infty}|C(u,s)|\mathrm{d}u\leqslant|C(t,s)|;$$

(4) 存在 $K>\frac{1}{2}$, 使得当 $t\geqslant 0$ 时有

$$2\alpha(t,K)-\frac{1-2K}{2K}k\leqslant 0,$$

则方程 (2.8.3) 存在以 ω 为周期的周期解.

证明 我们将验证在所设条件下, 定理 2.4.2 的全部条件成立.

首先, 易证 $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$, 从而定理 2.4.2 的条件 (i) 成立.

取

$$V(t,\varphi)=\frac{1}{2}\varphi^2(0)+K\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty}|C(u,t+s)|\varphi^2(s)\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

或

$$V(t,x_t)=\frac{1}{2}x^2(t)+K\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|C(u,s)|x^2(s)\mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

于是

$$V(t,\varphi)\geqslant\frac{1}{2}\varphi^2(0):=W(|\varphi(0)|),\quad W(r)=\frac{1}{2}r^2.$$

由不等式

$$[(1-\lambda)x_1+\lambda x_2]^2\leqslant(1-\lambda)x_1^2+\lambda x_2^2,\quad 0<\lambda<1$$

可以证明 $V(t,\varphi)$ 为凸泛函.

其次证明对于满足 $|\varphi|\leqslant H$ 的 φ , V 对于 φ 按 $|\cdot|_h$ 连续.

设 $\varphi_1,\ \varphi_2\in\mathscr{C}_h$ 且 $|\varphi_i|\leqslant H, i=1,2$ 有

$$\begin{aligned}|V(t,\varphi_1)-V(t,\varphi_2)|\leqslant&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|H\\&+2KH\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty}|C(u,t+s)||\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\\leqslant&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|H+2KH\eta(t)\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi_1-\varphi_2|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\=&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|H+2KH\eta(t)|\varphi_1-\varphi_2|_h.\end{aligned}$$

因而定理 2.4.2 的条件 (ii) 成立.

下面来验证定理 2.4.2 的条件 (iii) 及 (iv) 成立.

$$V'_{(2.8.3)}(t,x_t) \leqslant \alpha(t,K)|x(t)|^2 + \left(\frac{1}{2} - K\right)\int\limits_{-\infty}^{t} |C(t,s)||x(s)|^2 \mathrm{d}s + |x(t)||f(t)|.$$

令 $u(t) = C$, 当 $V(t,x_t) \geqslant u(t) = C$ 时有

$$|x(t)|^2 \geqslant 2C - 2K \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{t}^{+\infty} |C(u,s)||x(s)|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

因为 $\alpha(t,K) \leqslant 0$ 有

$$V'_{(2.8.3)}(t,x_t) \leqslant 2C\alpha(t,K) + \left\{-2\alpha(t,K) + \frac{1-2K}{2K}k\right\}V + \sqrt{2}L\sqrt{V} := g(t,V).$$

当 C 充分大时有

$$g(t,u(t)) \leqslant g(t,C) = \left(\frac{1-2K}{2K}k\sqrt{C} + \sqrt{2}L\right)\sqrt{C} < 0,$$

其中, $L := \max\limits_{t\in[0,\omega]} |f(t)|$, 故 $u'(t) = 0 > g(t,u(t))$, 从而定理 2.4.2 的条件 (iii) 及 (iv) 成立. 还易证明

$$V(t+\omega,\varphi) = V(t,\varphi),$$

即定理 2.4.2 的条件 (v) 成立.

下面再证明定理 2.4.2 的条件 (vi) 成立. 根据文献 [164] 引理 4, 只需证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, $J > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\varphi_1 - \varphi_2|_h \leqslant \delta$ 时有

$$|x(0,\varphi_1)(t) - x(0,\varphi_2)(t)| < \varepsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant J.$$

令 $M = \max\limits_{t\in[0,\omega]} |A(t)|$ 有

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant & |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)| + M\int\limits_{0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|\mathrm{d}s \\
& + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{u} |C(u,s)||x_1(s) - x_2(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
\leqslant & |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)| + M\int\limits_{0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|\mathrm{d}s \\
& + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{0} |C(u,s)||x_1(s) - x_2(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t\int_0^u |C(u,s)||x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
=&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|+M\int_0^t |x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s \\
&+\int_{-\infty}^0\int_0^t |C(u,s)|\mathrm{d}u|x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s \\
&+\int_0^t\int_s^t |C(u,s)|\mathrm{d}u|x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s \\
\leqslant&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|+M\int_0^t |x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s \\
&+\int_{-\infty}^0 h(s)|\varphi_1-\varphi_2|^{[s,0]}\mathrm{d}s+\int_0^t h(s)|x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s \\
=&|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|+\int_0^t (M+h(s))|x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s+|\varphi_1-\varphi_2|_h.
\end{aligned}
$$

由引理 2.1.2, 对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 对于 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{C}_h$, 当 $|\varphi_1-\varphi_2|_h\leqslant\delta$ 时有 $|\varphi_1(0)-\varphi_2(0)|\leqslant\varepsilon$. 于是

$$
|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant(\varepsilon+\delta)+\int_0^t (M+h(s))|x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s.
$$

由 Gronwall 不等式得

$$
|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant(\varepsilon+\delta)\exp\left\{\int_0^t (M+h(s))\mathrm{d}s\right\},
$$

对于 $t\in[0,J]$ 有

$$
|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant(\varepsilon+\delta)\exp\{MJ+l\}.
$$

因 $\varepsilon+\delta$ 可以任意小, 由文献 [164] 的引理 4 即知 $x(0,\varphi)$ 按 $|\cdot|_h$ 对 φ 连续相依.

至此, 定理 2.4.2 的全部条件都满足, 于是方程 (2.8.3) 存在以 ω 为周期的周期解. 定理证毕. ∎

下面考虑非线性方程

$$
x'(t)=A(t,x(t))+\int_{-\infty}^t C(t,s,x(s))\mathrm{d}s, \tag{2.8.14}
$$

其中, $A:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, C:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 连续, 又存在 $T>0$ 使得 $A(t+T,x)=A(t,x)$, $C(t+T,s+T,x)=C(t,s,x)$, $t,s\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$.

引理 2.8.7 如果

(1) $A(t,x)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件;

(2) 存在 $h:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$ 连续且满足

$$\begin{aligned}&|C(t,s,x_1)-C(t,s,x_2)|\leqslant h(s-t)|x_1-x_2|,\\&t\geqslant 0\geqslant s,\ \int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s=l<+\infty,\end{aligned}\tag{2.8.15}$$

且定理 2.1.3 的条件成立, 则在 h 所构成的 $\mathscr{C}_h$ 空间里, 方程 (2.8.14) 的右端泛函 $f(t,\varphi)$ 连续且对 φ 满足局部 Lipschitz 条件.

定理 2.8.17 如果引理 2.8.7 条件成立且有

(1) $\int_t^{+\infty}h(t-u)\mathrm{d}u\leqslant M_1,\ t\geqslant 0$;

(2) 存在 $K>0$, 使得

$$\int_t^{+\infty}h(s-u)\mathrm{d}u\leqslant Kh(s-t),\quad t\geqslant 0\geqslant s;$$

(3) 存在常数 $\beta>M_1$, 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$, $t\geqslant 0$ 有

$$(x-y)^{\mathrm{T}}[A(t,x)-A(t,y)]\leqslant -\beta|x-y|^2,$$

则方程 (2.8.14) 存在唯一全局稳定的 T 周期解.

证明 由已知条件, 由 h 所构成的 $\mathscr{C}_h$ 空间是容许的, 具衰减记忆的.

选取 $J:1<J\beta/M_1$, 构造泛函如下:

$$\begin{aligned}V(t,x_t,y_t)&=|x(t)-y(t)|+J\int_{-\infty}^{0}\int_t^{+\infty}h(t+s-u)|x_t(s)-y_t(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&=|x(t)-y(t)|+J\int_{-\infty}^{t}\int_t^{+\infty}h(s-u)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|\leqslant V(t,x_t,y_t)&\leqslant|x(t)-y(t)|+\int_{-\infty}^{t}Kh(s-t)|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant|x(t)-y(t)|+K|x_t-y_t|_h,\quad t\geqslant 0.\end{aligned}$$

设方程 (2.8.14) 的伴随系统为

$$\begin{cases} x'(t) = A(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t, s, x(s))\mathrm{d}s, \\ y'(t) = A(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(t, s, x(s))\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2.8.16}$$

则有

$$\begin{aligned} V'_{(2.8.16)}(t, x_t, y_t) \leqslant & \frac{(x(t) - y(t))^{\mathrm{T}}}{|x(t) - y(t)|}(x'(t) - y'(t)) \\ & + J\int_{t}^{+\infty} h(t-u)|x(t) - y(t)|\mathrm{d}u - J\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\ \leqslant & \frac{(x(t) - y(t))^{\mathrm{T}}}{|x(t) - y(t)|}[A(t, x(t)) - A(t, y(t))] \\ & + \frac{(x(t) - y(t))^{\mathrm{T}}}{|x(t) - y(t)|}\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\ & + JM_1|x(t) - y(t)| - J\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\ \leqslant & -(\beta - JM_1)|x(t) - y(t)| - (J-1)\int_{-\infty}^{t} h(s-t)|x(s) - y(s)|\mathrm{d}s \\ \leqslant & -(\beta - JM_1)|x(t) - y(t)| - \frac{J-1}{K}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty} h(s-u)|x(s) - y(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\ \leqslant & -\eta V(t, x_t, y_t), \quad t \geqslant 0, \end{aligned}$$

其中,

$$\eta = \min\left\{\beta - JM_1, \frac{J-1}{KJ}\right\}.$$

由定理 1.3.1 知方程 (2.8.14) 的解是强非常稳定的, 再由定理 1.5.1 完成本定理的证明. ∎

例 2.8.5 方程

$$x'(t) = -(2 + \cos t)\sinh x(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-t}\sin x(s)\mathrm{d}s + \cos t \tag{2.8.17}$$

具有唯一全局稳定的 2π 周期解.

这里

$$A(t,x) = -(2+\cos t)\sinh x + \cos t, \quad C(t,s,x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-t}\sin x.$$

因为

$$|C(t,s,x) - C(t,s,y)| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-t}|\sin x - \sin y| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-t}|x-y|,$$

故可取 $h(s) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^s$, $s \leqslant 0$ 有

$$\int_t^{+\infty} h(t-u)\mathrm{d}u = \int_t^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2} := M_1 < 1,$$

$$\int_t^{+\infty} h(s-u)\mathrm{d}u = \int_t^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{s-t} = h(s-t),$$

故可取 $K=1$. 又因 $(\sinh x)' = \cosh x \geqslant 1$, 故

$$\begin{aligned}
&(x-y)[-(2+\cos t)\sinh x + (2+\cos t)\sinh y] \\
=& -(x-y)(2+\cos t)(\sinh x - \sinh y) \\
=& -(2+\cos t)\cosh\xi \cdot (x-y)^2 \leqslant -(x-y)^2,
\end{aligned}$$

故可取 $\beta = 1$. 易见定理 2.8.17 的条件完全满足, 从而方程 (2.8.17) 具有唯一全局稳定的 2π 周期解.

本节内容主要取自文献 [147, 152, 164].

2.9 $\mathscr{C}_h$ 空间与泛函微分包含的周期解

在客观实际中很多系统往往含有某些不确定性, 其中包括由于认识上的限制所引起的不确定性. 微分方程不能很精确地描述这种含有某些不确定性的系统, 这类系统可以用微分包含来刻画

$$x' \in F(t,x),$$

其中, $F(t,x)$ 是一个集值映射.

早在 20 世纪 30 年代就有人开始研究微分包含. 到了 60 年代, 由于带状态反馈的控制问题

$$x' = f(t,x(t),u(t)), \quad u \in U(x)$$

可以归结为微分包含

$$x' \in F(t,x(t)), \quad F(t,x(t)) = \{f(t,x(t),u(t)),\ u \in U(x)\}$$

的研究. 随着现代控制理论的发展, 微分包含的研究越来越受到人们的重视.

对于具有时滞并含有某些不确定性的系统, 一般可用泛函微分包含

$$x' \in f(t, x_t)$$

来描述, 其中, f 为集值映射, $x_t(s) = x(t+s), s \in (-\infty, 0]$.

由于周期控制问题的需要, 微分包含的周期性问题受到人们的广泛重视. 经济学和生命科学中许多周期过程问题都可转化为泛函微分包含的周期解的存在性. 近年来, 许多学者对泛函微分包含的周期性进行了广泛的研究, 取得了大量的研究成果 (可参见文献 [66, 85, 107, 108, 117, 131]). 在具有无限时滞泛函微分包含的研究中相空间理论扮演着重要的角色 (如文献 [110, 117]). 作为 $\mathscr{C}_h$ 空间的应用, 本节介绍文献 [117] 的工作.

首先引入一些记号. 令 $I = [0, \omega], \omega > 0$, $\mathcal{I}$ 表示 I 的所有 Lebesgue 可测子集的 σ 代数. 设 X 是 Banach 空间, 其范数记为 $|\cdot|$. 令 $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 的所有 Borel 子集所构成的集合. 定义

$$P_f(X) = \{A \subset X | A\text{是}X\text{的非空闭子集}\},$$
$$P_k(X) = \{A \subset X | A\text{是}X\text{的非空紧子集}\}.$$

在 $P_f(X)$ 上引入度量

$$H(A, B) = \max\{\sup\{\mathrm{dist}(a, B) | a \in A\}, \sup\{\mathrm{dist}(b, A) | b \in B\}\},$$

则 $P_f(X)$ 是完备度量空间. 令

$$C(I, X) := \{x : I \to X | x \text{ 连续}, |x| = \max\{|x(t)| \; |t \in I\}\},$$
$$L^1(I, X) := \{x : I \to X | x \text{ 是 Bochner可积}, |x|_1 = \int_0^\omega |x(t)| \mathrm{d}t\},$$
$$AC(I, X) := \{x : I \to X | x \text{ 绝对连续}, |x|_{AC} = |x(0)| + |x'|_1\},$$

则 $C(I, X), L^1(I, X), AC(I, X)$ 都是 Banach 空间.

设 $D \subset L^1(I, X)$, 如果对任意的 $u, v \in D, A \subset D$ 都有 $u\chi_A + v\chi_{D\setminus A} \in D$ (χ_A 表示 A 的特征函数), 则称 D 是可分的. $L^1(I, X)$ 的所有可分的非空闭子集所构成的集合记为 $\mathcal{D}$.

设 Y 是度量空间, $\mathcal{A}$ 是 Y 的子集的 σ 代数, $F: Y \to P_f(X)$ 是集值映射. 如果对 X 的每个闭子集 D 都有 $\{y \in Y | F(y) \cap D \neq \varnothing\} \in \mathcal{A}$, 则称 F 是 $\mathcal{A}$ 可测的. 如果对任意闭子集 $D \subset X$, 集合 $\{y \in Y | F(y) \subset D\}$ 都是 Y 中的闭集, 则称 F 是下半连续的.

定义

$$\mathscr{C}_h=\left\{\varphi:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^n|\varphi\text{连续},\ |\varphi|_h=\varphi(0)+\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s<\infty\right\}.$$

考虑系统

$$x'\in f(t,x_t),\quad x_0=\varphi\in\mathscr{C}_h. \tag{2.9.1}$$

假设

(H_1) $f:\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h\to P_f(\mathbb{R}^n)$ 且 $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi),\omega>0,\varphi\in\mathscr{C}_h$;

(H_2) f 是 $\mathcal{L}\otimes\mathcal{B}(\mathscr{C}_h)$ 可测的;

(H_3) 对任一有界集 $D\subset\mathscr{C}_h$, 存在 $m\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$, 使得对任意的 $\varphi,\psi\in D$ 有

$$H(f(t,\varphi),f(t,\psi))\leqslant m(t)|\varphi-\psi|_h,\quad t\in I\text{ a.e.};$$

(H_4) 存在 $\alpha(t)\in L^1(I,\mathbb{R}^+)$, 使得 $\mathrm{dist}(0,f(t,0))\leqslant\alpha(t),t\in I$ a.e..

定义 2.9.1 映射 $x:I\to\mathbb{R}^n$ 称为 Cauchy 问题(2.9.1) 的解, 如果 $x\in AC(I,\mathbb{R}^n),x_0=\varphi$ 且在 I 上几乎处处满足 (2.9.1). 如果 $x\in AC(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处满足 (2.9.1) 且 $x(t+\omega)=x(t),t\in\mathbb{R}$, 则称 $x(t)$ 是系统 (2.9.1) 的 ω 周期解.

定义 2.9.2 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空有界子集. 如果存在 $M>0$, 使得对任意 $\varphi\in\mathscr{C}_h,\varphi(\theta)\in D,\theta\in\mathbb{R}^-$, (2.9.1) 的满足 $x_0=\varphi$ 的每个解均有 $|x(t)|\leqslant M,t\geqslant 0$, 则称 (2.9.1) 的解关于 D 一致有界.

定义 2.9.3 设 D_1,D_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空有界子集. 如果存在 $T>0$, 使得对任意的 $\varphi\in\mathscr{C}_h,\varphi(\theta)\in D_1,\theta\in\mathbb{R}^-$, (2.9.1) 的满足 $x_0=\varphi$ 的每个解均有 $x(t)\in D_2,t\geqslant T$, 则称 (2.9.1) 的解关于 D_1-D_2 一致最终有界. 设 $B>0$, 如果对给定的 $\alpha>0$, 存在 $T=T(\alpha)>0$, 使得对任何 $\varphi\in\mathscr{C}_h,|\varphi(\theta)|\leqslant\alpha,\theta\in\mathbb{R}^-$, (2.9.1) 的满足 $x_0=\varphi$ 的每个解均有 $|x(t)|\leqslant B,t\geqslant T$, 则称 (2.9.1) 的解一致最终有界.

引理 2.9.1 [32] 设集值映射 $G:S\to\mathcal{D}$ 是下半连续的, $\Phi:S\to L^1(I,X)$ 和 $\Psi:S\to L^1(I,\mathbb{R})$ 都是连续映射. 若对每个 $s\in S$, 集合

$$H(s)=\mathrm{cl}\{u\in G(s)|\ |u(t)-\Phi(s)(t)|<\Psi(s)(t),\ t\in I\ \text{ a.e.}\}$$

都是非空的, 则映射 $H:S\to\mathcal{D}$ 是下半连续的, 并且 H 有一个连续选择.

引理 2.9.2 [32] 设 $m(t),\alpha(t)\in L^1(I,\mathbb{R}),\varepsilon>0,\varepsilon_k=\dfrac{k+1}{k+2}\varepsilon,k\geqslant 0$. 令

$$\begin{aligned}&\alpha_0(t)=\alpha(t)+\varepsilon,\\&\alpha_k(t)=\int_0^t\alpha(s)\frac{[l(t)-l(s)]^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}s+\frac{(l(t))^{k-1}}{(k-1)!}\varepsilon_k\omega,\quad k\geqslant 1,\end{aligned}$$

其中, $l(t)=\int_0^t m(s)\mathrm{d}s$, 则

$$\int_0^t m(s)\alpha_n(s)\mathrm{d}s=\int_0^t \alpha(s)\frac{[l(t)-l(s)]^n}{n!}\mathrm{d}s+\frac{(l(t))^n}{n!}\varepsilon_n\omega<\alpha_{n+1}(t).$$

引理 2.9.3 设 $f(t,x)$ 满足 $(\mathrm{H}_2)\sim(\mathrm{H}_4)$, 则

$$G(\varphi)=\{v\in L^1(I,\mathbb{R}^n)|v(t)\in f(t,\varphi),\varphi\in\mathscr{C}_h,t\in I\quad \text{a.e.}\}$$

下半连续.

定理 2.9.1 设 $f(t,x)$ 满足 $(\mathrm{H}_2)\sim(\mathrm{H}_4)$, 则 (2.9.1) 存在解.

证明 考虑如下的 Cauchy 问题:

$$y'\in\tilde{f}(t,y_t,\varphi),\quad y_0=0,$$

其中,

$$y(t)=\begin{cases}0, & t\in\mathbb{R}^-,\\ x(t)-\varphi(0), & t\geqslant 0,\end{cases}$$
$$\tilde{f}(t,y_t,\varphi)=f(t,x_t),\quad t\in I,\quad \text{a.e.}.$$

定义

$$F(t,\psi,\varphi)=\tilde{f}(t,r(\psi),\varphi),\quad \psi\in\mathscr{C}_h,$$

其中,

$$r(\psi)(\theta)=\begin{cases}\psi(\theta), & |\psi(\theta)|\leqslant 1,\\ \dfrac{\psi(\theta)}{|\psi(\theta)|}, & |\psi(\theta)|>1.\end{cases}$$

由 F 的构造, 容易验证 $F(t,\psi,\varphi)$ 关于 $\psi\in\mathscr{C}_h$ 一致的满足条件 $(\mathrm{H}_2)\sim(\mathrm{H}_4)$.

考虑下面的 Cauchy 问题:

$$x'\in F(t,x_t,\varphi),\quad x_0=0. \tag{2.9.2}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $\varepsilon_k=\dfrac{k+1}{k+2}\varepsilon,k\geqslant 0$,

$$\alpha_0(t)=\alpha(t)+\varepsilon,$$
$$\alpha_k(t)=\int_0^t \alpha(s)\frac{[l(t)-l(s)]^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}s+\frac{(l(t))^{k-1}}{(k-1)!}\varepsilon_k\omega,\quad k\geqslant 1,$$

其中, $l(t)=\int_0^t m(s)\mathrm{d}s$, 则 $\alpha_k(t)$ 是 I 上的增函数.

令 $x_0(t,\varphi)\equiv 0$, 记

$$G_0(\varphi)=\{v\in L^1(I,\mathbb{R}^n)|v(t)\in F(t,(x_0)_t(\cdot,\varphi),\varphi),\quad t\in I\ \text{ a.e.}\},$$
$$H_0(\varphi)=\{v\in G_0(\varphi)||v(t)|<\alpha(t)+\varepsilon_0\}.$$

由引理 2.9.1 知 H_0 有一个连续选择 $h_0:\mathscr{C}_h\to L^1(I,\mathbb{R}^n)$, 使得

$$h_0(\varphi)(t)\in F(t,(x_0)_t(\cdot,\varphi),\varphi),\quad t\in I\ \text{ a.e.},$$
$$|h_0(\varphi)(t)|\leqslant\alpha(t)+\varepsilon_0.$$

定义

$$x_1(t,\varphi)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ \int_0^t h_0(\varphi)(s)\mathrm{d}s, & t\in I,\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}|x_1(t,\varphi)-x_0(t,\varphi)|<\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}s+\varepsilon_0\omega<\alpha_1(t),\\ |x_1'(t,\varphi)-x_0'(t,\varphi)|\leqslant\alpha(t)+\varepsilon_0,\\ x_1'(t,\varphi)\in F(t,(x_0)_t(\cdot,\varphi),\varphi),\quad t\in I\ \text{ a.e..}\end{cases}\tag{2.9.3}$$

于是, 由 (H_3) 和 (2.9.3) 有

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x_1'(t,\varphi),F(t,(x_1)_t(\cdot,\varphi),\varphi))&\leqslant H(F(t,(x_0)_t(\cdot,\varphi),\varphi),F(t,(x_1)_t(\cdot,\varphi),\varphi))\\&\leqslant m(t)\alpha_1(t)+m(t)\int_{-\infty}^0 h(s)|(x_0)_t-(x_1)_t|^{[s,0]}\mathrm{d}s\\&\leqslant(l+1)m(t)\alpha_1(t),\quad t\in I\ \text{ a.e..}\end{aligned}$$

假设已经定义了函数 $x_0,\cdots,x_k$ 且 x_k 满足

(a) $\varphi\to x_k(\cdot,\varphi)$ 连续, $x_k(t,\varphi)=0,t\leqslant 0$;

(b) $x_k'\in F(t,(x_{k-1})_t(\cdot,\varphi),\varphi),\quad t\in I$ a.e.;

(c) $|x_k'(t,\varphi)-x_{k-1}'(t,\varphi)|\leqslant(1+l)^{k-1}m(t)\alpha_{k-1}(t),\quad t\in I$ a.e.,

则

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x_k'(t,\varphi),F(t,(x_k)_t(\cdot,\varphi),\varphi))&\leqslant H(F(t,(x_{k-1})_t(\cdot,\varphi),\varphi),F(t,(x_k)_t(\cdot,\varphi),\varphi))\\&\leqslant m(t)|(x_k)_t(\cdot,\varphi)-(x_{k-1})_t(\cdot,\varphi)|_h.\end{aligned}$$

由引理 2.9.2 和 (c) 有

$$|x_k(t,\varphi)-x_{k-1}(t,\varphi)|\leqslant(1+l)^{k-1}\int_0^t m(s)\alpha_{k-1}(s)\mathrm{d}s<(1+l)^{k-1}\alpha_k(t),$$

从而

$$|(x_k)_t(\cdot,\varphi)-(x_{k-1})_t(\cdot,\varphi)|_h \leqslant (1+l)^k\alpha_k(t).$$

因此

$$\operatorname{dist}(x_k'(t,\varphi),F(t,(x_k)_t(\cdot,\varphi),\varphi)) < (1+l)^k m(t)\alpha_k(t), \quad t\in I \text{ a.e.}. \tag{2.9.4}$$

令

$$\begin{aligned}
G_k(\varphi) &= \{v\in L^1(I,\mathbb{R}^n)|v(t)\in F(t,(x_k)_t(\cdot,\varphi),\varphi), t\in I \text{ a.e.}\},\\
H_k(\varphi) &= \{v\in G_k(\varphi)||v(t)-x_k'(t,\varphi)|<(1+l)^k m(t)\alpha_k(t), t\in I \text{ a.e.}\}.
\end{aligned}$$

由 (2.9.4) 知 $H_k(\varphi)$ 非空. 进而, 由引理 2.9.1, H_k 有一个连续选择 $h_k:\mathscr{C}_h\to L^1(I,\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\begin{aligned}
&h_k(\varphi)(t)\in F(t,(x_k)_t(\cdot,\varphi),\varphi), \quad t\in I \text{ a.e.},\\
&|h_k(\varphi)(t)-x_k'(t,\varphi)|\leqslant (1+l)^k m(t)\alpha_k(t), \quad t\in I \text{ a.e.}.
\end{aligned}$$

定义

$$x_{k+1}(t,\varphi)=\begin{cases} 0, & t\leqslant 0,\\ \displaystyle\int_0^t h_k(\varphi)(s)\mathrm{d}s, & t\in I,\end{cases}$$

则 $x_{k+1}(t,\varphi)$ 也满足 (a)~(c). 由引理 2.9.2 有

$$|x_{k+1}(t,\varphi)-x_k(t,\varphi)|<(1+l)^k\alpha_{k+1}(t), \quad t\in I \text{ a.e.},$$

从而

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}'(t,\varphi),F(t,(x_{k+1})_t(\cdot,\varphi),\varphi))\leqslant (1+l)^{k+1}m(t)\alpha_{k+1}(t), \quad t\in I \text{ a.e.},$$

$$|x_{k+1}(t,\varphi)-x_k(t,\varphi)|\leqslant (1+l)^k\alpha_{k+1}(\omega)\leqslant (1+l)^k\frac{1}{k!}\left[\int_0^\omega m(s)\mathrm{d}s\right]^k\left(\int_0^\omega \alpha(s)\mathrm{d}s+\varepsilon\omega\right).$$

这表明 $x_k(t,\varphi)$ 关于 $t\in I$ 是一致收敛的, 并且 $\varphi\in\mathscr{C}_h$. 注意到对每个 $k, x_k(t,\varphi)$ 关于 (t,φ) 连续且关于 t 绝对连续, 因此 $x_k(t,\varphi)$ 的极限函数 $x(t,\varphi)$ 满足 (2.9.1). 证毕. ∎

定理 2.9.2 设 $D_1\subset\mathbb{R}^n$ 是非空有界开凸集, $D_2\subset\mathbb{R}^n$ 是非空有界闭凸集, 且 $D_2\subset D_1$, $\operatorname{dist}(\partial D_1,D_2)>0$. 如果系统 (2.9.1) 的解关于 D_1 一致有界, 关于 D_1-D_2 一致最终有界, 则 (2.9.1) 在 D_2 中必有一个 ω 周期解.

证明 由系统 (2.9.1) 的解的一致有界性和一致最终有界性知, 存在 $M>0$ 和正整数 N, 使得对 (2.9.1) 从 D_1 出发的每一个解 $x(t)$, 都有

$$x(t)\in D_2,\ t\in[N\omega,+\infty), \quad |x(t)|\leqslant M,\ t\geqslant 0. \tag{2.9.5}$$

令 $M_1 = M + \sup\limits_{y\in D_1} |y| + 1$. 考虑 Cauchy 问题

$$x' \in F(t, x_t), \quad x_0 = \varphi, \tag{2.9.6}$$

其中, $F(t,\varphi) = f(t, r(\varphi))$,

$$r(\varphi)(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta), & |\varphi(\theta)| \leqslant M_1 + 2, \\ (M_1+2)\dfrac{\varphi(\theta)}{|\varphi(\theta)|}, & |\varphi(\theta)| > M_1 + 2. \end{cases}$$

显然存在 $\alpha(t), m(t) \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$, 使得对所有的 $\varphi \in \mathscr{C}_h$, $F(t,\varphi)$ 都满足 $(\mathrm{H}_2) \sim (\mathrm{H}_4)$. 对任给的 $k \geqslant 1$, 取正整数 $N_1 \geqslant N$, 使得

$$2(M_1+2)\int_{-\infty}^{-(N_1-N)\omega} h(s)\mathrm{d}s < \frac{\varepsilon_0}{4k}, \quad t \geqslant N_1\omega,$$

其中，$\varepsilon_0 = \mathrm{dist}(\partial D_1, D_2)$. 于是由 (2.9.5) 和 $|\cdot|_h$ 的定义, 对位于 D_1 中的任意 φ, (2.9.1) 满足 $x_0 = \varphi$ 的每一个解 $x(t)$, 都有

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x_t, C(\mathbb{R}^-, D_2)) &= \inf_{\psi\in C(\mathbb{R}^-,D_2)} |x_t - \psi|_h \\ &= \inf_{\psi\in C(\mathbb{R}^-,D_2)} \int_{\mathbb{R}^-} h(s)|x_t - \psi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &= \inf_{\psi\in C(\mathbb{R}^-,D_2)} \int_{-\infty}^{-(N_1-N)\omega} h(s)|x_t - \psi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\ &\leqslant 2(M_1+2)\int_{-\infty}^{-(N_1-N)\omega} h(s)\mathrm{d}s \\ &< \frac{\varepsilon_0}{4k}, \quad t \geqslant N_1\omega. \end{aligned} \tag{2.9.7}$$

不失一般性, 假设 $\omega \leqslant 1$, 并且设 $\alpha(t)$ 和 $m(t)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上以 ω 为周期的周期函数. 设

$$Y = \Bigg\{\varphi \in \mathscr{C}_h \Big| |\varphi(\theta)| \leqslant M_1 + 1,\ \theta \in \mathbb{R}^-,$$
$$|\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leqslant 2\left|\int_{-\theta_2}^{-\theta_1} K(s)\mathrm{d}s\right|,\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^-, |\theta_1 - \theta_2| \leqslant 1\Bigg\},$$

其中,

$$K(t) = \sum_{i=0}^{+\infty}(1+l)^i m(t)\alpha_i(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

由 Arzela-Ascoli 定理知

$$\{\bar{\varphi} \in C([-s,0],\mathbb{R}^n)|\bar{\varphi} = \varphi^{[-s,0]},\ \varphi \in Y\}$$

是紧集. 由 Y 的构造知, Y 是列紧的, 进而也是紧的. 从定理 2.9.1 的证明知存在一个连续映射 $x(t,\varphi)$, 使得对每个 φ, $x(\cdot,\varphi)$ 都是 (2.9.6) 的解.

由 (2.9.5) 知对 D_1 中任意的 φ, 都有

$$|x(t,\varphi)| \leqslant M,\ t \geqslant 0, \quad x(t,\varphi) \in D_2,\ t \geqslant N\omega.$$

注意到 $x(t,\varphi)$ 在任意有界区间上关于 t 一致连续, 故存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得对任何满足 $\mathrm{dist}(x_t(\cdot,\varphi),C(\mathbb{R}^-,\bar{D}_1)) < \varepsilon_1$ 的 $\varphi \in \mathscr{C}_h$, 都有

$$\begin{cases} \mathrm{dist}(x_t(\cdot,\varphi),C(\mathbb{R}^-,D_2)) < \dfrac{\varepsilon_0}{2k}, & t \in [N_1\omega, 2N_1\omega], \\ x(t,\varphi) \in S(0,M_1+1), & t \in [0,N_1\omega], \\ x(t,\varphi) \in \left(D_2,\dfrac{\varepsilon_0}{2k}\right), & t \in [N_1\omega,2N_1\omega], \end{cases} \tag{2.9.8}$$

其中, $S(0,r) = \{y \in \mathbb{R}^n|\ |y| < r\}$.

设

$$S_2 = Y, \quad S_1 = \left\{\varphi \in S_2|\mathrm{dist}(\varphi, C(\mathbb{R}^-,D_1)) < \frac{\varepsilon_1}{2}\right\},$$
$$S_0 = \left\{\varphi \in S_1|\varphi(\theta) \in \overline{S\left(D_2,\frac{\varepsilon_0}{2k}\right)}, \theta \in [-\omega,0], \mathrm{dist}(\varphi,C(\mathbb{R}^-,D_2)) \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2k}\right\},$$

则 S_2 和 S_0 都是紧的, S_1 相对于 S_2 是开的且 $S_0 \subset S_1 \subset S_2$.

定义 $P: S_2 \to \mathscr{C}_h, P(\varphi) = x_\omega(\cdot,\varphi)$. 由定理 2.9.1 的证明知

$$|x'(t,\varphi)| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}|x_i'(t,\varphi) - x_{i+1}'(t,\varphi)| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}(1+l)^i m(t)\alpha_i(t) = K(t).$$

由 (2.9.8) 知

$$P^j(S_1) \subset S_2, \quad j = 0,\cdots,N_1-1,$$
$$P^j(S_1) \subset S_0, \quad j = N_1,\cdots,2N_1-1.$$

注意到 P 是连续的, 根据 Horn 不动点定理, P 必有一个不动点 $\varphi_k \in S_0$, i.e., $\varphi_k(s) = x(s+\omega,\varphi_k), s \in \mathbb{R}^-$. 因为 $s \in [-\omega,0]$ 时, $\varphi_k(s) \in S\left(D_2,\dfrac{\varepsilon_0}{2k}\right)$, 故 φ_k 位于 $\overline{S\left(D_2,\dfrac{\varepsilon_0}{2k}\right)}$ 中, 因此

$$x(t+\omega,\varphi_k) = x(t,\varphi_k), \quad t \in \mathbb{R},$$

即 $x(t,\varphi_k)$ 是 $x' \in F(t,x_t)$ 的 ω 周期解. 由 Arzela-Ascoli 定理, $\{x(t,\varphi_k)\}$ 有收敛的子列, 其极限函数即为所求的 $x' \in F(t,x_t)$ 的 ω 周期解. 由 F 的构造知, 它也是 (2.9.1) 的周期解. 证毕. ∎

$\mathscr{C}_h$ 空间还有更为广泛的应用. 例如, 盖明久等[62] 以 $\mathscr{C}_h$ 空间为基础, 利用上下解方法研究了具有无限时滞的 RFDE 的初值问题解的存在唯一性, 减弱了通常的 Lipschitz 条件; 时宝等[137, 138] 利用 $\mathscr{C}_h$ 空间研究了具有无限时滞的 Volterra 反应扩散方程组的正解的存在唯一性; 魏凤英[168] 在 $\mathscr{C}_h$ 空间、$\mathscr{C}_g$ 空间中研究了具有无限时滞的随机泛函微分方程的解的存在唯一性, 并给出了近似解和精确解之间的误差估计等, 此处从略.

第 3 章　$\mathscr{C}_g$ 空间及其应用

$\mathscr{C}_g$ 空间是另一个具有优良特性的具体的相空间, 与 $\mathscr{C}_h$ 空间有着紧密的联系. 国内学者经常使用 $\mathscr{C}_h$ 空间, 而国外的学者比较习惯于使用 $\mathscr{C}_g$ 空间. 本章介绍 $\mathscr{C}_g$ 相空间理论及其应用.

3.1　$\mathscr{C}_g$ 空间及其性质

定义

$$G := \{g|\mathbb{R}^- \to [1,+\infty) \text{ 连续不增且 } g(0)=1, g(-\infty)=+\infty\}.$$

对 $g \in G$, 文献 [5] 定义

$$\mathscr{C}_g = \left\{\varphi \in \mathscr{C} \middle| \frac{\varphi}{g} \text{ 在 } \mathbb{R}^- \text{ 上一致连续且 } \sup_{s\leqslant 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)} < \infty \right\}$$

且对任意的 $\varphi \in \mathscr{C}_g$,

$$|\varphi|_g := \sup_{s\leqslant 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)}.$$

引理 3.1.1[5, 19]　$(\mathscr{C}_g, |\cdot|_g)$ 是 Banach 空间.

一般来说, 空间 $(\mathscr{C}_g, |\cdot|_g)$ 不一定是容许相空间[67]. 如果要想使 $(\mathscr{C}_g, |\cdot|_g)$ 成为容许的, 需要额外附加条件. 有如下引理:

引理 3.1.2[67]　若

$$\frac{g(s+u)}{g(s)} \to 1, \quad u \to 0 \tag{3.1.1}$$

在 $\mathbb{R}^-$ 上一致成立, 则 $\mathscr{C}_g$ 是容许的.

引理 3.1.3　若 (3.1.1) 成立且存在 $M(t): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 连续, 使得

$$\frac{g(s)}{g(s-t)} \leqslant M(t), \quad t \geqslant 0 \geqslant s, \quad \lim_{t\to\infty} M(t) = 0, \tag{3.1.2}$$

则 $(\mathscr{C}_g, |\cdot|_g)$ 是具衰减记忆的容许相空间.

证明　设 $0 \leqslant \sigma < A \leqslant \infty$, $x : (-\infty, A] \to \mathbb{R}^n$ 在 $[\sigma, A)$ 上连续, $x_\sigma \in \mathscr{C}_g$, 则当 $t \geqslant \sigma$ 时有

$$
\begin{aligned}
|x_t|_g &= \sup_{s\leqslant 0} \frac{|x_t(s)|}{g(s)} \\
&\leqslant \sup_{-(t-\sigma)\leqslant s\leqslant 0} \frac{|x_t(s)|}{g(s)} + \sup_{s\leqslant -(t-\sigma)} \frac{|x_t(s)|}{g(s)} \\
&\leqslant |x|^{[\sigma,t]} + \sup_{s\leqslant 0} \frac{|x_t(s-(t-\sigma))|}{g(s-(t-\sigma))} \\
&= |x|^{[\sigma,t]} + \sup_{s\leqslant 0} \frac{g(s)}{g(s-(t-\sigma))} \cdot \frac{|x_\sigma(s)|}{g(s)} \\
&\leqslant |x|^{[\sigma,t]} + M(t-\sigma)|x_\sigma|_g.
\end{aligned}
$$

由条件 (3.1.2), 引理得证. ∎

3.2　$\mathscr{C}_h$ 空间和 $\mathscr{C}_g$ 空间的关系

令 $H := \left\{ h|\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ \text{ 连续且 } \int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s = l < \infty \right\}.$

引理 3.2.1[14]　*对任意 $h \in H$ 和任意正整数 m, 存在 $g \in G$ 和 $L > 0$, 使得*

$$
\int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s < L < \infty \quad \text{以及} \quad \int_{-\infty}^{0} h(s)g^m(s)\mathrm{d}s < L.
$$

证明　令 $\{t_n\}, t_n > 0$ 是满足

$$
t_{n+1} > t_n, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty, \quad \int_{-t_{n+1}}^{-t_n} h(s)\mathrm{d}s = \frac{l}{\mathrm{e}}\frac{1}{n!}, \quad t_0 = 0
$$

的序列, 且对 $\varepsilon < (1/m)\ln(L/l)$, 令

$$
g_1(t) = (1+\varepsilon)^n, \quad t \in [-t_{n+1}, -t_n].
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} h(s)g_1(s)\mathrm{d}s &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-t_{n+1}}^{-t_n} h(s)g_1(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{l}{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon)^n}{n!} = l\mathrm{e}^{\varepsilon} < L.
\end{aligned}
$$

令 $h_1(s)=h(s)g_1(s)$, 则有 $\int\limits_{-\infty}^{0} h_1(s)\mathrm{d}s = l\mathrm{e}^{\varepsilon} < L$, 令 $\{t_n^{(1)}\}, t_n^{(1)} > 0$ 是满足

$$t_{n+1}^{(1)} > t_n^{(1)}, \quad \lim_{n\to+\infty} t_n^{(1)} = +\infty, \quad \int\limits_{-t_{n+1}^{(1)}}^{-t_n^{(1)}} h_1(s)\mathrm{d}s = \frac{l\mathrm{e}^{\varepsilon}}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{n!}, \quad t_0 = 0$$

的序列, 则有

$$\int\limits_{-\infty}^{0} h_1(s)g_1(s)\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-t_{n+1}^{(1)}}^{-t_n^{(1)}} h_1(s)g_1(s)\mathrm{d}s = \left(\frac{l\mathrm{e}^{\varepsilon}}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{1+\varepsilon} = l\mathrm{e}^{2\varepsilon} < L.$$

同理, 可证

$$\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)g_1^m(s)\mathrm{d}s = \int\limits_{-\infty}^{0} h_{m-1}(s)g_1(s)\mathrm{d}s = \left(\frac{l\mathrm{e}^{(m-1)\varepsilon}}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{1+\varepsilon} < L.$$

令 $g(t)=\alpha_n t+\beta_n,\ t\in[-t_{n+1},-t_n]$, 其中,

$$t_0 = 0, \quad \alpha_0=\beta_0=0, \quad \alpha_n = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}}{t_n - t_{n+1}}, \quad \beta_n = (1+\varepsilon)^n + \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1}}{t_n-t_{n+1}}t_{n+1}.$$

显然, $g(t)$ 是连续的且 $g(t)\leqslant g_1(t)$. 由此有

$$\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)g^m(s)\mathrm{d}s < L.$$

■

引理 3.2.2 *对任意 $g\in G$, 存在 $h\in H$, 使得* $\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\mathrm{d}s = 1.$

证明 令 $h(s)=\mathrm{e}^s/g(s),\ s\leqslant 0$, 于是有

$$\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s \leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^s\mathrm{d}s = 1 < \infty$$

和

$$\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\mathrm{d}s = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^s\mathrm{d}s = 1.$$

■

定理 3.2.1 对任意 $g \in G$, 存在 $h \in H$, 使得 $\mathscr{C}_g \subset \mathscr{C}_h$ 且对任意 $\varphi \in \mathscr{C}_g$ 有 $|\varphi|_h \leqslant |\varphi|_g$.

证明 对任意 $g \in G$, 由引理 3.2.2 知存在 $h \in H$, 使得

$$\int_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\mathrm{d}s = 1.$$

由此对任意 $\varphi \in \mathscr{C}_g$ 有

$$\begin{aligned}
|\varphi|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\frac{|\varphi|^{[s,0]}}{g(s)}\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\frac{\sup\limits_{u\in[s,0]}|\varphi(u)|}{g(s)}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\sup_{u\in[s,0]}\left|\frac{\varphi(u)}{g(u)}\right|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\sup_{u\leqslant 0}\frac{|\varphi(u)|}{g(u)}\mathrm{d}s \leqslant |\varphi|_g < \infty.
\end{aligned}$$

因此, $\varphi \in \mathscr{C}_h$, 从而 $\mathscr{C}_g \subset \mathscr{C}_h$. ∎

本节内容主要取自文献 [76].

3.3 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界性和 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界性

考虑方程

$$x' = f(t, x_t), \tag{3.3.1}$$

其中, Ω 是 $\mathbb{R} \times \mathscr{C}_g$ 中的开集, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 连续且 $f(t,\varphi)$ 对 φ 满足 Lipschitz 条件.

定义 3.3.1 方程 (3.3.1) 的解称为是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的, 如果对任意 $H > 0$ 和任意 $\sigma \in \mathbb{R}^+$ 存在 $N(H) > 0$, 使得只要 $\varphi \in \mathscr{C}_g$, $|\varphi|_g \leqslant H$, $t \geqslant \sigma$, 就有

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant N(H).$$

定义 3.3.2 方程 (3.3.1) 的解称为是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的 (界为 B), 如果对每个 $H > 0$ 和 $\sigma \in \mathbb{R}^+$, 存在 $T(H) > 0$, 使得只要 $\varphi \in \mathscr{C}_g$, $|\varphi|_g \leqslant H$, $t \geqslant \sigma + T(H)$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant B$.

定义 3.3.3[16] 泛函 $V(t,\varphi)$ 称为是 g 一致健忘的, 如果存在楔函数 $W_i(r)(i=1,2)$, 使得对任意连续函数 $x(t)$, $t\geqslant\sigma$ 有

(1) $0\leqslant V(t,x_t)\leqslant W_1(|x(t)|)+W_2(|x_t|_g)$;

(2) 对任意 $a>0, R>0$, 存在 $S=S(a,R)>0$, 使得只要

$$\sigma>-\infty,\quad t\geqslant\sigma+S,\quad |x_\sigma|_g\leqslant R$$

就有

$$0\leqslant V(t,x_t)\leqslant a+W_1(|x(t)|)+W_2(|x|^{[\sigma,t]}).$$

例 3.3.1 令 $g(s)=\exp\{-s/2\}$ 及

$$V(t,x_t)=|x(t)|+\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(u-s)}|x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

于是

$$\begin{aligned}0\leqslant V(t,x_t)&=|x(t)|+\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(u-s-t)}|x(s+t)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&=|x(t)|+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{s}g(s)\left(\frac{|x(s+t)|}{g(s)}\right)\mathrm{d}s\\&\leqslant|x(t)|+|x_t|_g\int_{-\infty}^{0}g(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s=|x(t)|+2|x_t|_g.\end{aligned}$$

定义 $W_1(r)=r$, $W_2(r)=2r$, 则定义 3.3.3 中的条件 (1) 成立.

对任意 $a>0, R>0$, 选取 $S>0$, 使得 $\mathrm{e}^{-S}\leqslant a/2R$, 则只要 $t\geqslant\sigma+S, |x_\sigma|_g\leqslant R$ 就有

$$\begin{aligned}V(t,x_t)&=|x(t)|+\int_{-\infty}^{\sigma}\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(u-s)}|x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int_{\sigma}^{t}\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(u-s)}|x(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&=|x(t)|+\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{e}^{s}|x(\sigma+s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s+|x|^{[\sigma,t]}\\&=|x(t)|+\mathrm{e}^{-(t-\sigma)}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{s}g(s)\left(\frac{|x(t+s)|}{g(s)}\right)\mathrm{d}s+|x|^{[\sigma,t]}\\&=|x(t)|+2\mathrm{e}^{-S}|x_\sigma|_g+|x|^{[\sigma,t]}\\&\leqslant a+|x(t)|+2|x|^{[\sigma,t]}.\end{aligned}$$

因此, $V(t,\varphi)$ 是 g 一致健忘的.

定理 3.3.1　设存在泛函 $V(t,\varphi)$ 和楔函数 $W(r), W_i(r)(i=1,2)$ 和常数 $U>0$, 使得对方程 (3.3.1) 任意解 $x=x(\sigma,\varphi)(t)$ 有

(1) $W(|x(t)|) \leqslant V(t,x_t) \leqslant W_1(|x(t)|)+W_2(|x_t|_g),\ t\geqslant\sigma$;

(2) $V'_{(3.3.1)}(t,x_t)\leqslant 0,\ |x(t)|\geqslant U$;

(3) $\lim\limits_{r\to\infty}(W(r)-W_2(r+H))=\infty,\ H>0$,

则方程 (3.3.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的.

证明　对任意 $H>0$ 和任意 $\varphi\in\mathscr{C}_g, |\varphi|_g\leqslant H$ 有

$$|\varphi|_g=\sup_{s\leqslant 0}\frac{|\varphi(s)|}{g(s)}\geqslant\frac{|\varphi(0)|}{g(0)}=|\varphi(0)|.$$

选取 $U>H$, 由条件 (3) 知存在 $M>U$, 使得只要 $r\geqslant M$ 就有

$$W(r)-W_2(r+H)>W(U)+W_1(U). \tag{3.3.2}$$

对方程 (3.3.1) 的任意解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$,$t\geqslant\sigma$, $|\varphi|_g\leqslant H$, 或者有

(A) $|x(t)|<M,\ t\geqslant\sigma$,

或者有

(B) 存在第一个 $t_1>\sigma$, 使得 $|x(t_1)|=M$.

如果 (B) 成立, 则或者

(B_1) 对 $t\geqslant t_1$ 有 $|x(t)|>U$,

或者

(B_2) 存在第一个 $t_2>t_1$, 使得 $|x(t_2)|=U$.

如果 (B_1) 成立, 对方程 (3.3.1) 的任意解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$, 令

$$E(t,x_t)=V(t,x_t)-W(|x(t)|),$$

则有

$$V'_{(3.3.1)}(t,x_t)=E'_{(3.3.1)}(t,x_t)+W'_{(3.3.1)}(|x(t)|)\leqslant 0.$$

当 $t\geqslant t_1$ 时有

$$E(t,x_t)-E(t_1,x_{t_1})\leqslant -W(|x(t)|)+W(|x(t_1)|).$$

因而有

$$|x(t)|\leqslant W^{-1}(W(M)+W_1(M)+W_2(M+H)):=N(H)(>M).$$

如果 (B_2) 成立, 则令 $|x(t^*)|=\max\limits_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}|x(t)|\geqslant M$, 往证

$$|x(t)|\leqslant|x(t^*)|,\quad t\geqslant t_2. \tag{3.3.3}$$

事实上, 若 (3.3.3) 不成立, 则存在第一个区间 $[t_3, t_4]$, 满足

$$|x(t_3)| = U, \quad |x(t_4)| = |x(t^*)|, \quad |x(t)| \geqslant U,\ t \in [t_3, t_4].$$

由条件 (2) 有

$$E(t_4, x_{t_4}) - E(t_3, x_{t_3}) \leqslant -W(|x(t_4)|) + W(|x(t_3)|),$$

从而有

$$0 \leqslant -W(|x(t^*)|) + W_2(|x(t^*)| + H) + W(U) + W_1(U),$$

这与 (3.3.2) 相矛盾. 这就证明了 (3.3.3). 容易证明 $|x(t^*)| \leqslant N(H)$ (参考 (B_1) 部分的证明). 这就证明了 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界性. ■

定理 3.3.2 设定理 3.3.1 的条件 (1) 成立且存在楔函数 $W_3(r)$, 使得

(1)* $V'_{(3.3.1)}(t, x_t) \leqslant -W_3(|x(t)|) - |W'_{(3.3.1)}(|x(t)|)|,\ |x(t)| \geqslant U;$

(2) $\lim\limits_{r\to\infty}(2W(r) - W_2(r+H)) = \infty,\ H > 0,$

则方程 (3.3.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的.

证明 对任意给定的 $H > 0$ 和任意 $\varphi \in \mathscr{C}_g$, $|\varphi|_g \leqslant H$ 有

$$|\varphi|_g = \sup_{s\leqslant 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)} \geqslant \frac{|\varphi(0)|}{g(0)} = |\varphi(0)|.$$

选取 $U > H$, 由条件 (2) 知存在 $M > U$, 使得只要 $r \geqslant M$ 就有

$$2W(r) > W_2(r + H) + W_1(U) + W(U).$$

对方程 (3.3.1) 的任意满足 $t \geqslant \sigma, |\varphi|_g \leqslant H$ 的解 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t)$, 或者有

(A) 对 $t \geqslant \sigma$, 有 $|x| < M$,

或者有

(B) 存在第一个 $t_1 > \sigma$, 满足 $|x(t_1)| = M$.

如果 (B) 成立, 则由条件 (1)* 知 $|x| > U$ 不可能对所有的 $t \geqslant t_1$ 都成立, 因此存在第一个 $t_2 \geqslant t_1$, 使得 $|x(t_2)| = U$. 令

$$|x(\bar{t})| = \max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2} |x(t)| \geqslant M.$$

要证明对所有的 $t \geqslant \sigma$ 有 $|x| \leqslant |x(\bar{t})|$. 如若不然, 就存在第一个区间 $[t_3, t_4]$, $t_3 \geqslant t_2$, 使得

$$|x(t_3)| = U, \quad |x(t_4)| = |x(\bar{t})|, \quad |x| \geqslant U, \quad t \in [t_3, t_4].$$

此外, 还存在第一个 $t_5 > t_4$ 满足 $|x(t_5)| = U$. 于是有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant V(t_5, x_{t_5}) &\leqslant V(t_3, x_{t_3}) - \int_{t_3}^{t_4} |W'_{(3.3.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s - \int_{t_4}^{t_5} |W'_{(3.3.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant W_1(|x(t_3)|) + W_2(|x_{t_3}|_g) - 2W(|x(\bar{t})|) + 2W(U) \\
&\leqslant W_2(|x(\bar{t})| + H) - 2W(|x(\bar{t})|) + W_1(U) + 2W(U) < 0,
\end{aligned}
$$

这个矛盾就证明了 $|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})|$, $t \geqslant \sigma$.

由条件 (1)* 得到

$$
|x(\bar{t})| \leqslant W^{-1}(W_1(M) + W(M) + W_2(H + M)) := N(H)
$$

(参见定理 3.3.1 中 (B_1) 证明). 定理证毕. ■

下面考虑常微分方程

$$
y'(t) = G(t, y(t)), \tag{3.3.4}
$$

其中, $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 连续. 用 $u(t, s, \alpha)$ 和 $r(t, s, \alpha)$ 分别表示方程 (3.3.4) 的过 (s, α) 的右行和左行最大解.

引理 3.3.1[95] *假设对所有的 $s \in [t - \tau, t], \tau \geqslant 0$, 如果 $v(s) \leqslant r(s, t, v(t))$, 就有 $D^+v(t) \leqslant G(t, v(t))$, 则*

$$
v(t) \leqslant u(t, s, \alpha), \quad t \geqslant a,
$$

其中, $v(s) = r(s, a, \alpha)$, $s \in [a - \tau, a]$.

定理 3.3.3 *设存在泛函 $V(t, \varphi)$ 和楔函数 $W_i(r)(i = 1, 2)$, 使得对方程 (3.3.1) 的任意解 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t)$ 和 $t \geqslant \sigma$ 有*

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x_t|_g)$;

(2) $V'_{(3.3.1)}(t, x_t) \leqslant G(t, V)$ 且方程 (3.3.4) 的解是一致有界的,

则方程 (3.3.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的.

证明 令 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t)$ 是方程 (3.3.1) 的任意一个满足 $|\varphi|_g \leqslant H$ 的解, 其中, $H > 0$ 是任意给定的数, $\varphi \in \mathscr{C}_g$ 是任意给定的初始函数, 设 $y(t) = y(t, \sigma, y_0)$ 是方程 (3.3.4) 的满足 $y_0 = V(\sigma, \varphi)$ 的右行最大解.

由条件 (1) 有 $y_0 = V(\sigma, \varphi) \leqslant W_2(|\varphi|_g) \leqslant W_2(H)$.

由条件 (2), 对 $W_2(H) > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 使得只要 $y_0 \leqslant W_2(H)$, $t \geqslant \sigma$, 就有 $y(t, \sigma, y_0) \leqslant N_1$. 由引理 3.3.1 有

$$
V(t, x_t) \leqslant y(t, \sigma, y_0) \leqslant N_1, \quad t \geqslant \sigma,
$$

从而得到

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant y(t, \sigma, y_0) \leqslant N_1,$$

$$|x(t)| \leqslant W_1^{-1}(N_1) := N, \quad t \geqslant \sigma.$$

这就是要证明的 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界性. ∎

定理 3.3.4 *设存在一致健忘的泛函 $V(t,\varphi)$ 满足定理 3.3.2 的条件, 则方程 (3.3.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.*

证明 选取 $M > U$, 使得只要 $r \geqslant M$, 就有

$$2W(r) - W_2(r) > 3W_1(U) + 2W(U). \tag{3.3.5}$$

定理 3.3.2 保证方程 (3.3.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的. 因此, 对任意 $H > 0$, 存在 $D(H) > 0$, 使得只要 $t \geqslant \sigma$, $|\varphi|_g \leqslant H$ 就有 $|x(t,\sigma,\varphi)| \leqslant D$. 可以令 $D > M$. 因为 $W(r)$ 在区间 $[M, D]$ 上是一致连续的, 故存在正数 $m = m(H) < D - M$, 使得

$$W(r) - W(r-m) < \frac{W_1(U)}{2}, \quad r \in [M, D].$$

由 (3.3.5) 有

$$2W(r-m) - W_2(r) > 2W_1(U) + 2W(U). \tag{3.3.6}$$

由条件 (2), 存在 $L > 0$, 使得 $|x(t)| \geqslant U$ 不能在任何长为 L 的区间上恒成立. 同时, 对 $a = W_1(U)$, $R = H + D > 0$, 存在 $S = S(H) > 0$, 使得只要 $t \geqslant \sigma + S$, $|x_\sigma|_g \leqslant R$ 就有

$$0 \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_1(U) + W_1(|x(t)|) + W_2(|x|^{[\sigma,t]}).$$

令 $I_i = [\sigma + (i-1)(L+S), \sigma + i(L+S)]$, $i = 1, 2, \cdots$. 在任意 I_i 上, 或者有

(A) $|x(t)| \leqslant M$,

或者有

(B) 存在 $t^* \in I_i$, 使得 $|x(t^*)| > M$.

若 (A) 成立, 则或者有

(A_1) 对所有 $t > \sigma + i(L+S)$, 有 $|x(t)| < M$,

或者有

(A_2) 存在第一个 $t_1 > \sigma + i(L+S)$, 使得 $|x(t_1)| = M$.

当 (A_2) 成立时, 由条件 (2) 知存在第一个 $t_2 > t_1$, 使得 $|x(t_2)| = U$. 令

$$|x(\bar{t})| = \max_{\sigma+(i-1)(L+S) \leqslant t \leqslant t_2} |x(t)| \geqslant M.$$

要证明当 $t > t_2$ 时有 $|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})|$.

若不然, 则存在某个 $t > t_2$, 使得 $|x(t)| > |x(\bar{t})|$. 因此在 t_2 的右端存在第一个区间 $[t_3, t_5]$ 满足

$$|x(t_3)| = U = |x(t_5)|, \quad |x(t)| \geqslant U,\ t \in [t_3, t_5].$$

同时, 存在 $t_4 \in [t_3, t_5]$, 使得 $|x(t_4)| = |x(\bar{t})|$. 因此有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant V(t_5, x_{t_5}) &\leqslant V(t_3, x_{t_3}) - 2W(|x(t_4)|) + 2W(U) \\ &\leqslant W_1(U) + W_1(|x(t_3)|) + W_2(|x|^{[\sigma+(i-1)(L+S), t_3]}) - 2W(|x(t_4)|) + 2W(U) \\ &\leqslant -2W(|x(\bar{t})|) + W_2(|x(\bar{t})|) + 2W_1(U) + 2W(U) < 0 \end{aligned}$$

这个矛盾证明了当 $t > t_2$ 时有 $|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})|$, 即

$$|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})|, \quad t \geqslant \sigma + (i-1)(L+S).$$

由条件 (1)* 有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant V(\bar{t}, x_{\bar{t}}) \leqslant V(t_1, x_{t1}) - \int_{t_1}^{\bar{t}} |W'_{(3.3.1)}(|x(t)|)| \mathrm{d}t \\ \leqslant W_1(U) + W_1(M) + W_2(M) - W(|x(\bar{t})|) + W(M). \end{aligned}$$

由此得

$$W(|x(\bar{t})|) \leqslant W_1(U) + W_1(M) + W_2(M) + W(M).$$

因此当 $t \geqslant \sigma + (i-1)(L+S)$ 时有

$$|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})| \leqslant W^{-1}(W_1(U) + W_1(M) + W_2(M) + W(M)) := B.$$

也就是说, 若 (A) 成立, 则

$$|x(t)| \leqslant B, \quad t \geqslant \sigma + (i-1)(L+S).$$

下面讨论当 (B) 成立的情况. 由条件 (2) 知存在 $t_6 \in I_{i+1}$, 使得 $|x(t_6)| < U$. 令

$$M_i = \max_{t+(i-1)(L+S) \leqslant t \leqslant t_6} |x(t)|.$$

下面来证明当 $t \geqslant t_6$ 时有 $|x(t)| \leqslant M_i - m$.

如若不然, 则存在第一个 $t_7 > t_6$, 使得 $|x(t_7)| > M_i - m$. 存在第一个区间 $t_8 < t_9 < t_{10}$, 使得

$$\begin{aligned} &|x(t)| \leqslant M_i,\ t \in [t_6, t_8], \quad |x(t_8)| = U = |x(t_{10})|, \\ &|x(t_9)| = M_i - m, \quad |x(t)| \geqslant U,\ t \in [t_8, t_{10}]. \end{aligned}$$

因此有

$$0 \leqslant V(t_{10}, x_{t_{10}}) \leqslant V(t_8, x_{t_8}) - \int_{t_8}^{t_9} |W'_{(3.3.1)}(|x(t)|)|\mathrm{d}t - \int_{t_9}^{t_{10}} |W'_{(3.3.1)}(|x(t)|)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2W_1(U) + W_2(M_i) - 2W(M_i - m) + 2W(U) < 0.$$

这个矛盾证明了当 $t \geqslant t_6$ 时有 $|x(t)| \leqslant M_i - m$. 也就是说,

$$|x(t)| \leqslant M_i - m, \quad t \geqslant \sigma + (i+1)(L+S).$$

因为 $M_i \leqslant D$, 情况 (B) 只能发生有限次, 因而情况 (A) 必然要发生.

选取正数 $n : nm > D$, 并令 $T = 2n(S+L)$. 容易证明只要 $t \geqslant \sigma + T$, $|\varphi|_g \leqslant H$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant B$. 证毕. ∎

定理 3.3.5 如果定理 3.3.3 的条件成立, 但把其中条件 (2) 中的方程 (3.3.4) 的解看成是一致最终有界的, 则方程 (3.3.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.

定理的证明类似于定理 3.3.3 的证明, 从略.

3.4 对 Volterra 方程的有界性的应用

考虑纯量 Volterra 方程

$$x' = A(t)x^m + \int_{-\infty}^{t} D(t,s)x(s)\mathrm{d}s + f(t), \tag{3.4.1}$$

其中, $D : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 均连续, $m = 2k-1(k = 1, 2, \cdots)$.

定理 3.4.1 设

(1) $\int_{t}^{+\infty} |D(u,t)|\mathrm{d}u \leqslant M$, $\int_{0}^{+\infty} |D(v+t, s+t)|\mathrm{d}v \leqslant h(s)$, $t \geqslant 0$, 其中, $h \in H, l < 1$;

(2) $A(t) \leqslant a$, $|f(t)| \leqslant N$, 其中, $a < 0$, $N > 0$ 是常数,

则存在 $g \in G$, 使得方程 (3.4.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的.

证明 只需证明定理 3.3.1 的条件满足. 因为 $h \in H$ 和 $l < 1$, 由引理 3.2.1 知存在 $g \in G$ 和 $L : l < L < 1$, 使得 $\int_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\mathrm{d}s < L$.

定义泛函如下:

$$V(t,\varphi) = J\left[|\varphi(0)| + \int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty} |D(u, t+s)||\varphi(s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right],$$

其中, $J > 1/(1-L)$.

令 $x(t) = x(\sigma,\varphi)(t), \sigma \in \mathbb{R}^+$ 是方程 (3.4.1) 满足 $x_\sigma = \varphi$ 的解, 则对任意 $t \geqslant \sigma$ 有

$$V(t,x_t) = J\left[|x(t)| + \int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty}|D(u,t+s)||x(t+s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]$$

以及

$$\begin{aligned}(J-1)|x(t)| \leqslant V(t,x_t) &= J\left[|x(t)| + \int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty}|D(u,t+s)|\frac{|x(t+s)|}{g(s)}g(s)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right]\\ &\leqslant J\left[|x(t)| + \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{0}^{+\infty}|D(u+t,s+t)|\mathrm{d}u\right)g(s)\mathrm{d}s|x_t|_g\right]\\ &\leqslant J\left[|x(t)| + |x_t|_g\int_{-\infty}^{0}h(s)g(s)\mathrm{d}s\right] \leqslant J(|x(t)| + L|x_t|_g).\end{aligned}$$

定义 $W(r) = (J-1)r$, $W_1(r) = Jr$, $W_2(r) = JLr$. 定理 3.3.1 的条件 (1) 成立.

其次, 还有

$$V'_{(3.4.1))}(t,x_t) = J|x(t)|' + J\int_{t}^{+\infty}|D(u,t)|\mathrm{d}u\cdot|x(t)| - J\int_{-\infty}^{t}|D(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s.$$

注意到

$$\begin{aligned}|x(t)|' &= A(t)|x(t)|^m + \mathrm{sgn}x(t)\int_{-\infty}^{t}D(t,s)x(s)\mathrm{d}s + \mathrm{sgn}x(t)f(t)\\ &\leqslant A(t)|x(t)|^m + \int_{-\infty}^{t}|D(t,s)||x(s)|\mathrm{d}s + N,\end{aligned}$$

令 $U = (2N/(-a))^{1/m} + (2M/(-a))^{1/(m-1)}$, 当 $|x(t)| \geqslant U$ 时有

$$\begin{aligned}V'_{(3.4.1)}(t,x_t) &\leqslant JA(t)|x(t)|^m + J\int_{t}^{+\infty}|D(u,t)|\mathrm{d}u\cdot|x(t)| + JN\\ &\leqslant Ja|x(t)|^m + JM|x(t)| + JN\\ &= J\left[\left(\frac{1}{2}a|x(t)|^m + N\right) + \left(\frac{1}{2}a|x(t)|^m + M|x(t)|\right)\right]\\ &\leqslant 0,\end{aligned}$$

故定理 3.3.1 的条件 (2) 成立. 显然有

$$\lim_{r\to\infty}(W(r) - W_2(r+H)) = \lim_{r\to\infty}(J - JL - 1)r = \infty.$$

这说明定理 3.3.1 的条件 (3) 成立. 由定理 3.3.1 完成证明. ■

定理 3.4.2 设定理 3.3.1 的条件 (2) 成立, 并且

(1) $|D(u,t+s)| \leqslant e(u,t)h(s),\ h \in H$;

(2) $\int_t^{+\infty} e(u,t)\mathrm{d}u \leqslant E < \infty,\ \lim_{t\to\infty}\int_t^{+\infty} e(u,\sigma)\mathrm{d}u = 0$;

(3) $lE < 1$,

则存在 $g \in G$, 使得方程 (3.4.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界和 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.

证明 由引理 3.2.1, 存在 $g \in G$ 和 $L : l < L < 1/E$, 使得 $\int_{-\infty}^{0} h(s)g(s)\mathrm{d}s < L$.

定义泛函如下:

$$V(t, x_t) = |x(t)| + J\int_{-\infty}^{0}\int_t^{+\infty} |D(u,t+s)||x(t+s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

其中 $2/(2 - LE) < J < 2$, 有

$$\begin{aligned}0 \leqslant V(t,x_t) &\leqslant |x(t)| + J\int_{-\infty}^{0}\int_t^{+\infty} |D(u,t+s)||x(t+s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\ &\leqslant |x(t)| + J\int_{-\infty}^{0} Eh(s)g(s)\frac{|x(t+s)|}{g(s)}\mathrm{d}s \\ &\leqslant |x(t)| + LJE|x_t|_g.\end{aligned}$$

由条件 (2), 对任意 $\delta > 0$, $R > 0$, 存在 $S > 0$, 使得只要 $t \geqslant \sigma + S$ 就有

$$J\int_t^{+\infty} e(u,\sigma)\mathrm{d}u \leqslant \frac{\delta}{RL}.$$

于是对 $t \geqslant \sigma + S, |x_\sigma|_g \leqslant R$ 有

$$\begin{aligned}
0 \leqslant V(t, x_t) &= |x(t)| + J \int_t^{+\infty} \int_{-\infty}^{\sigma} |D(u, s)||x(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&\quad + J \int_t^{+\infty} \int_{\sigma}^{t} |D(u, s)||x(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&= |x(t)| + J \int_t^{+\infty} \int_{-\infty}^{0} |D(u, s+\sigma)||x_\sigma(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&\quad + J \int_t^{+\infty} \int_{-(t-\sigma)}^{0} |D(u, t+s)||x_t(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\
&\leqslant |x(t)| + L \cdot \frac{\delta}{RL} |x_\sigma|_g + LJE|x|^{[\sigma,t]} \\
&\leqslant \delta + |x(t)| + LJE|x|^{[\sigma,t]}.
\end{aligned}$$

令 $W_1(r) = r$, $W_2(r) = LJEr$. 易见 $V(x_t)$ 是 g 一致健忘的. 此外

$$\begin{aligned}
V'_{(3.4.1)}(t, x_t) &\leqslant A(t)|x(t)|^m + \int_{-\infty}^{t} |D(t, s)||x(s)|\mathrm{d}s + N \\
&\quad + J \int_t^{+\infty} |D(u, t)|\mathrm{d}u|x(t)| - J \int_{-\infty}^{t} |D(t, s)||x(s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant -(J-1)\left[|A(t)||x(t)|^m + \int_{-\infty}^{t} |D(t, s)||x(s)|\mathrm{d}s + N\right] \\
&\quad + (J-2)|A(t)||x(t)|^m + JM|x(t)| + JN \\
&\leqslant -(J-1)||x(t)|'| - ((2-J)|a|/2)|x(t)|^m, \quad |x(t)| \geqslant U,
\end{aligned}$$

其中,

$$M = Eh(0), \quad U = \left(\frac{4JM}{|a|(2-J)}\right)^{1/m-1} + \left(\frac{4JN}{|a|(2-J)}\right)^{1/m}.$$

令 $W(r) = (J-1)r$, $W_3(r) = ((2-J)/2)|a|r^m$, 进而有

$$\lim_{r\to\infty} (2W(r) - W_2(r+H)) = \lim_{r\to\infty} (2J - 2 - LJE)r = \infty.$$

至此, 定理 3.3.2 的条件全部满足, 故定理结论成立. ∎

下面考虑纯量方程

$$x' = A(t)x^m + \int_{-\infty}^{t} D(t,s)x^m(s)\mathrm{d}s + f(t), \tag{3.4.2}$$

其中, $D:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, A:\mathbb{R}\to(-\infty,0), f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, $m=2k-1(k=1,2,\cdots)$.

定理 3.4.3 设

(1) $\int_t^{\infty}|D(u,t)|\mathrm{d}u \leqslant M < 1$ 和 $\int_t^{\infty}|D(u,s)|\mathrm{d}u \leqslant K|D(t,s)|,\ t\geqslant 0$, 其中, $K>0$ 是常数;

(2) $|D(t,t+s)|\leqslant h(s)$, 其中, $h\in H$;

(3) $|f(t)|\leqslant N,\ A(t)\leqslant A$, 其中, $N>0,\ A<0$,

则存在 $g\in G$, 使得方程 (3.4.2) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界和 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.

证明 由引理 3.2.1 存在 $g\in G$ 和 $L>0$, 使得 $\int_{-\infty}^{0} h(s)g^m(s)\mathrm{d}s < L < \infty$. 令

$$V(t,x_t) = |x(t)| + J\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{\infty}|D(u,t+s)||x(t+s)|^m\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

其中, $1<J<|A|/M$. 于是

$$\begin{aligned}|x(t)| \leqslant V(t,x_t) &\leqslant |x(t)| + J\int_{-\infty}^{0}K|D(t,t+s)||x_t(s)|^m\mathrm{d}s\\ &\leqslant |x(t)| + JK\int_{-\infty}^{0}h(s)g^m(s)\frac{|x_t(s)|^m}{g^m(s)}\mathrm{d}s\\ &\leqslant |x_t|_g + JKL|x_t|_g^m,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}V'_{(3.4.2)}(t,x_t) \leqslant &A(t)|x(t)|^m - (J-1)\int_{-\infty}^{t}|D(t,s)||x(s)|^m\mathrm{d}s + |f(t)| + JM|x(t)|^m\\ &\leqslant -(|A|-JM)|x(t)|^m - \frac{J-1}{KJ}J\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}|D(u,s)||x(s)|^m\mathrm{d}u\mathrm{d}s + N\\ &\leqslant -\eta V(t,x_t) + N := G(t,V),\end{aligned}$$

其中, $\eta=\min\{(|A|-JM),(J-1)/(KJ)\}>0$. 显然, 方程 $y'=G(t,y)$ 的解是一致有界和一致最终有界的. 令 $W_1(r)=r,\ W_2(r)=r+JKLr^m$. 至此, 定理 3.3.3 的条件全部满足, 定理得证. ∎

3.5　$\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 稳定与 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的等价性

$\mathscr{C}_g$ 是一个具有优良性质的相空间, 但如果不进一步附加条件, $\mathscr{C}_g$ 并不是 Hale-Kato 意义下的容许相空间, 所以文献 [71] 和 [96] 中的稳定性的等价性定理并不能直接应用于 $\mathscr{C}_g$ 空间. 鉴于 $\mathscr{C}_g$ 在理论和应用上的明显的重要性, 本节研究 $\mathscr{C}_g$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中泛函微分方程的解的稳定性的等价性问题. 关于方程 (3.3.1) 的零解的各种 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 稳定性和 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 稳定性的定义, 请参考 2.3 节, 并把那里的 h 改为 g, 此处从略.

定理 3.5.1　方程 (3.3.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 稳定的当且仅当 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的.

证明　注意到

$$|x(t)-u(t)|=|x_t(0)-u_t(0)|\leqslant \sup_{s\leqslant 0}\frac{|x_t(s)-u_t(s)|}{g(s)}=|x_t-u_t|_g.$$

若 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 稳定的, 则由稳定性的定义易证它也是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的.

若 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的, 则对任意 $\sigma\geqslant t_0$ 和任意 $\varepsilon>0$, 可选取 $\delta<\varepsilon/2$, 使得只要

$$|\psi-u_\sigma|_g<\delta,\quad \psi\in\mathscr{C}_g$$

就有

$$|x(\sigma,\psi)(t)-u(t)|<\varepsilon,\quad t\geqslant\sigma,$$

从而有

$$\begin{aligned}|x_t(\sigma,\psi)-u_t|_g&=\sup_{s\leqslant 0}\frac{1}{g(s)}|x(\sigma,\psi)(t+s)-u(t+s)|\\&\leqslant \sup_{s\leqslant -(t-\sigma)}\frac{1}{g(s)}|x(\sigma,\psi)(t+s)-u(t+s)|\\&\quad+\sup_{-(t-\sigma)\leqslant s\leqslant 0}\frac{1}{g(s)}|x(\sigma,\psi)(t+s)-u(t+s)|\\&\leqslant\sup_{\tau\leqslant 0}\frac{1}{g(\tau)}|x(\sigma,\psi)(\sigma+\tau)-u(\sigma+\tau)|\\&\quad+\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x(\sigma,\psi)(t)-u(t)|\\&\leqslant|\psi-u_\sigma|_g+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\quad t\geqslant\sigma.\end{aligned}$$

这说明 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 稳定的. ∎

定理 3.5.2　方程 (3.3.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 一致稳定的当且仅当 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致稳定的.

证明与上面类似, 此处从略.

定义函数

$$M(t)=\sup_{s\leqslant -t}\frac{g(t+s)}{g(s)},\quad t\geqslant 0.$$

定理 3.5.3 如果方程 (3.3.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 渐近稳定的, 则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的. 如果 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的且

$$\lim_{t\to+\infty}M(t)=0,$$

则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 渐近稳定的.

证明 定理第一部分的证明与前面类似, 此处从略. 下面证明第二部分.

因 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 渐近稳定的, 故存在 $\delta'>0$, 对任意 $\varepsilon>0$ 及任意 $\psi\in\mathscr{C}_g$, $|\psi-u_\sigma|_g<\delta'$, 存在 $N_1=N_1(\varepsilon,\sigma,\psi)$, 使得当 $t\geqslant\sigma+N_1$ 时有

$$|x(\sigma,\psi)(t)-u(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 稳定的, 故对 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta''>0$, 使得当 $\psi\in\mathscr{C}_g$, $|\psi-u_\sigma|_g<\delta''$ 时有

$$|x(\sigma,\psi)(t)-u(t)|<1,\quad t\geqslant\sigma.$$

取 $\delta=\min\{\delta',\delta'',1\}$ 及 $N>N_1$, 满足

$$M(N)=\sup_{s\leqslant -N}\frac{g(N+s)}{g(s)}=\sup_{\tau\leqslant 0}\frac{g(\tau)}{g(\tau-N)}<\frac{\varepsilon}{4},\quad g(-(N-N_1))>\frac{4}{\varepsilon},$$

则当 $\psi\in\mathscr{C}_g$, $|\psi-u_\sigma|_g<\delta$, $t\geqslant\sigma+N$ 时有

$$\begin{aligned}|x_t(\sigma,\psi)-u_t|_g&=\sup_{s\leqslant 0}\frac{1}{g(s)}|x(\sigma,\psi)(t+s)-u(t+s)|\\&\leqslant\sup_{s\leqslant-(t-\sigma)}\frac{1}{g(s)}|x(\sigma,\psi)(t+s)-u(t+s)|\\&\quad+\sup_{-(t-\sigma)\leqslant s\leqslant-(t-\sigma-N_1)}\frac{1}{g(s)}|x(\sigma,\psi)(t+s)-u(t+s)|\\&\quad+\sup_{-(t-\sigma-N_1)\leqslant s\leqslant 0}\frac{1}{g(s)}|x(\sigma,\psi)(t+s)-u(t+s)|\\&:=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

易证当 $t\geqslant\sigma+N$ 时, $I_1<\frac{\varepsilon}{4}$, $I_2<\frac{\varepsilon}{4}$, $I_3<\frac{\varepsilon}{2}$, 于是当 $\psi\in\mathscr{C}_g$, $|\psi-u_\sigma|_g<\delta$, $t\geqslant\sigma+N$ 时, 有

$$|x_t(\sigma,\psi)-u_t|_g<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 渐近稳定的. 定理证毕. ■

定理 3.5.4　*若方程 (3.3.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 指数渐近稳定 (全局 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 指数渐近稳定) 的, 则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的 (全局 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的). 若方程 (3.3.1) 的解 $u(t)$ 是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定 (全局 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定) 的且存在 $N, k > 0$, 使得*

$$M(t) \leqslant N\mathrm{e}^{-kt}, \quad t \geqslant 0, \tag{3.5.1}$$

则 $u(t)$ 也是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 指数渐近稳定 (全局 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 指数渐近稳定) 的.

证明从略.

本节内容主要取自文献 [151].

3.6 对稳定性问题的应用

在 2.3 节 (定理 2.3.1), 以 $\mathscr{C}_h$ 相空间为基础, 研究了具有无限时滞的 RFDE 的 $\mathscr{C}_h$-$\mathbb{R}^n$ 的一致渐近稳定性. 类似地, 在 $\mathscr{C}_g$ 空间中, 有如下定理:

定理 3.6.1　*假如存在 g 一致健忘的泛函 $V(t, x_t)$, 楔函数 $W_i(r)(i = 1, 2, 3, 4)$, $W(r)$, 使得对方程 (2.3.1) 的任意解 $x(t) = x(\sigma, \phi)(t)$ 有*

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_g),\ t \geqslant \sigma$;

(2) $V'_{(2.3.1)}(t, x_t) \leqslant -W_4(|x(t)|) - |W'_{(2.3.1)}(|x(t)|)|,\ t \geqslant \sigma$;

(3) *存在* $\beta > 1$, *使* $2W(r) - W_3(\beta r)$ *是楔函数*;

(4) $f(t, 0) \equiv 0,\ t \in \mathbb{R}$,

则方程 (2.3.1) 的零解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

应用定理 3.3.4, 具体证明过程完全类似于定理 2.3.1 的证明, 此处从略.

类似 2.8.2 小节的定理 2.8.2 有

定理 3.6.2　*如果*

(1) *存在连续单调不增函数* $g : \mathbb{R}^- \to [1, +\infty)$, $g(0) = 1$, $g(-\infty) = +\infty$, *使得*

$$G(t) = \int_{-\infty}^{0} |S(t, t+s)|g(s)\mathrm{d}s < +\infty$$

且 $G(t)$ 关于 t 连续;

(2) *对函数 $g(s)$, 条件 (3.1.1) 和 (3.1.2) 成立*;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\int_{t}^{+\infty} |D(u, t+s)|g(s)\mathrm{d}u\mathrm{d}s \leqslant a < \infty$;

(4) *定理 2.8.2 的条件 (2) ～ (4) 成立*,

则方程 (2.8.3) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 一致渐近稳定的.

证明 由函数 g 构造 $\mathscr{C}_g$ 空间. 由条件 (2) 知 $\mathscr{C}_g$ 是容许的具衰减记忆的. 定义泛函 $V(t,\varphi)$ 与定理 2.8.2 的证明完全相同. 用类似方法可以证明本定理. 此处从略. ∎

3.7 对周期解问题的应用

在方程 (3.3.1) 中, 本节总设 $f(t+\omega,\varphi)=f(t,\varphi)$. 文献 [5] 给出如下保证周期解存在的定理:

定理 3.7.1 设

(1) 如果 $\varphi\in\mathscr{C}_g$, 则存在方程 (3.3.1) 的唯一解 $x(0,\varphi)(t)$ 定义在 $[0,\infty)$ 上;

(2) 方程 (3.3.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 一致有界和 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 一致最终有界的;

(3) 对任意 $\gamma>0$, 存在 $L=L(\gamma)>0$, 使得只要 $|\varphi(t)|\leqslant\gamma$, $t\in\mathbb{R}^-$ 就有 $|x'(0,\varphi)|\leqslant L$;

(4) 对任意 $\gamma>0$, 方程 (3.3.1) 的解连续依赖于集合 $\{\varphi\in\mathscr{C}_g||\varphi(t)|\leqslant\gamma,\ t\in\mathbb{R}^-\}$ 中的初始函数,

则方程 (3.3.1) 存在 ω 周期解.

因为在 3.3 节和 3.4 节中已经得到了保证上述定理的条件 (2) 和 (3) 成立的充分条件, 所以可以得到如下定理:

定理 3.7.2 如果定理 3.4.2 的条件成立且 $D(t+\omega,s+\omega)=D(t,s)$, $f(t+\omega)=f(t)$, 又对某个常数 $E^*>0$ 有 $e(t,t)\leqslant E^*$, 则方程 (3.4.1) 存在 ω 周期解.

证明 由定理 3.4.2 知方程 (3.4.1) 的解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 一致有界和 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 一致最终有界的.

下面只需验证定理 3.7.1 的条件 (3) 即可.

$$\begin{aligned}|f(t,\varphi)|&\leqslant|\varphi(0)|^m|a|+\int_{-\infty}^{0}|D(t,t+s)||\varphi(s)|\mathrm{d}s+|f(t)|\\&\leqslant|a||\varphi(0)|^m+\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi(s)|\mathrm{d}s\cdot e(t,t)+N\\&\leqslant|a|\gamma^m+E^*l\gamma+N:=L(\gamma).\end{aligned}$$

由此定理 3.7.1 的全部条件都满足, 定理得证. ∎

定理 3.7.3 如果定理 3.4.3 的条件满足且 $D(t+\omega,s+\omega)=D(t,s)$, $f(t+\omega)=f(t)$. 则方程 (3.4.2) 存在 ω 周期解.

证明与定理 3.7.2 的证明完全类似, 此处从略.

考虑线性向量 Volterra 方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t,s)x(s)\mathrm{d}s + f(t) \tag{3.7.1}$$

及其对应的齐次方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \tag{3.7.2}$$

其中,

$$D(t+\omega, s+\omega) = D(t,s),\ A(t+\omega) = A(t),\ f(t+\omega) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.7.3}$$

引理 3.7.1　*设存在 $V(t, x_t)$ 满足*

(1) $a|x(t)| \leqslant V(t,x_t) \leqslant b|x(t)| + l|x_t|_g,\ a, b, l > 0$;

(2) $V'_{(3.7.2)}(t, x_t) \leqslant -cV(t, x_t),\ c > 0$,

则方程 (3.7.2) 的零解是全局 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的.

证明　由条件 (1),(2) 有

$$\begin{aligned} a|x(t)| \leqslant V(t,x_t) &\leqslant V(\sigma, x_\sigma)\exp\{-c(t-\sigma)\} \\ &\leqslant (b|\varphi(0)| + l|\varphi|_g)\exp\{-c(t-\sigma)\} \\ &\leqslant (b+l)|\varphi|_g \exp\{-c(t-\sigma)\}. \end{aligned}$$

结论显然. ■

引理 3.7.2　*若方程 (3.7.2) 的零解是全局 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 指数渐近稳定的, 则方程 (3.7.1) 存在唯一 ω 周期解.*

证明　定义映射 $P: \mathscr{C}_g \to \mathscr{C}_g$ 如下:

$$P\psi = x_{\sigma+\omega}(\sigma, \psi), \quad \psi \in \mathscr{C}_g.$$

存在正整数 m, 使 $M\mathrm{e}^{-cm\omega} < 1$. 易证 P^m 是压缩映射, 故 P 在 $\mathscr{C}_g$ 中有唯一不动点 φ^*. 易证 $x(\sigma, \varphi^*)(t)$ 是方程 (3.7.1) 的唯一 ω 周期解. ■

引理 3.7.3　*若方程 (3.7.2) 的零解是全局 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 指数渐近稳定的且条件 (3.5.1) 成立, 则方程 (3.7.1) 存在唯一 ω 周期解且此周期解是稳定的.*

证明　因条件 (3.5.1) 成立, 由定理 3.5.4 知方程 (3.7.2) 的零解是 $\mathscr{C}_g$-$\mathscr{C}_g$ 指数渐近稳定的, 再由引理 3.7.2 知 (3.7.1) 存在 ω 周期解 $u(t)$. 由 $\mathscr{C}_g$-$\mathbb{R}^n$ 稳定性的定义知 $u(t)$ 是稳定的. ■

定理 3.7.4 设条件 (3.7.3) 成立且

(1) $\int\limits_{t}^{+\infty}|D(u,t)|\mathrm{d}u\leqslant M_1<1,\ \int\limits_{t}^{+\infty}|D(u,s)|\mathrm{d}u\leqslant K|D(t,s)|, t\geqslant 0$;

(2) 存在连续函数 $h:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$, 满足

$$|D(t,t+s)|\leqslant h(s),\ s\leqslant 0,\quad \int\limits_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s<\infty;$$

(3) 存在连续不增函数 $g:\mathbb{R}^-\to[1,\infty),\ g(-\infty)=+\infty, g(0)=1$, 满足

$$\int\limits_{-\infty}^{0}h(s)g(s)\mathrm{d}s\leqslant L<+\infty,\quad M(t)=\sup_{s\leqslant -t}\frac{g(s+t)}{g(s)}\leqslant N\mathrm{e}^{-kt},\quad t\geqslant 0,$$

其中, N,k 为正常数;

(4) 存在 $\beta>M_1$, 对任意 $x\in\mathbb{R}^n, t\geqslant 0$ 有 $x^{\omega}A(t)x\leqslant -\beta|x|^2$,

则方程 (3.7.1) 存在唯一稳定的 ω 周期解.

证明 取 J, 满足 $1<J<\dfrac{\beta}{M_1}$. 定义

$$V(t,x_t)=|x(t)|+J\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{t}^{+\infty}|D(u,t+s)||x(t+s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

有

$$|x(t)|\leqslant V(t,x_t)\leqslant |x(t)|+JKL|x_t|_g,$$

以及

$$V'_{(3.7.2)}(t,x_t)\leqslant -\eta V(t,x_t),$$

其中

$$\eta=\min\left\{\beta-JM_1,\frac{J-1}{K}\right\}.$$

由引理 3.7.3 即完成定理证明. ∎

推论 3.7.1 方程

$$x'(t)=-(2+\cos t)x(t)+\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{1}{4}(1+\sin^4(s+t))\mathrm{e}^{s-t}x(s)\mathrm{d}s+\cos(\sin t).$$

具有唯一稳定的 2π 周期解.

证明　取 $K=2$ 易见定理 3.7.4 的条件 (1) 满足, 取 $h(s)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^s$, 则条件 (2) 满足, 取 $g(s)=\mathrm{e}^{\frac{-s}{2}}$, $s\leqslant 0$. 易见条件 (3) 满足. 取 $\beta=1$, 从而条件 (4) 满足. 由定理 3.7.4 完成证明. ∎

定理 3.7.5　*如果条件 (3.7.3) 成立且定理 3.6.2 的条件成立, 则方程 (3.7.1) 存在 ω 周期解.*

3.8　$\mathbb{R}^n$ 中的极限集

在自治微分方程的稳定性理论中, LaSalle 不变集原理可以大致地确定解或轨道的 ω 极限集的位置. 他的这个重要的结果后来被在一定意义下推广到了非自治微分方程[73, 145]. 近来人们试图对泛函微分方程获得类似的结果[73, 93, 129, 174, 175], 然而, 上述的结果多数讨论的是 Banach 空间中的 ω 极限集. 另一方面, 绝大多数现有的保证泛函微分方程的解一致有界的结果是在空间 $\mathbb{R}^n$ 中给出的. 这些有界性的结果使人们相信在一定的条件之下, $\mathbb{R}^n$ 中的 ω 极限集也应该是存在的. 研究这种 $\mathbb{R}^n$ 中的 ω 极限集的存在性及其拓扑结构是非常有趣的, 因为可以从中比较它们的相同之处和不同之处, 以便从中发现规律. 本节将给出一些关于泛函微分方程的解的 ω 极限集的结果, 考虑的是 $\mathbb{R}^n$ 空间中的极限集而不是 Banach 空间中的极限集.

在极限集的研究中, 解的有界性起关键的作用, 将在前几章的基础上, 进一步给出具有无限时滞的泛函微分方程的解的一致有界性和一致最终有界性的定理, 同时也给出了一些应用的例子.

本节总设相空间 $\mathscr{B}$ 是容许的.

设 Ω 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, 考虑方程

$$x'=f(t,x_t). \tag{3.8.1}$$

在 (3.8.1) 中假设

($\mathcal{B}_\infty$) 对任意 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$, 方程 (3.8.1) 的局部解 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 存在;

($\mathcal{B}_\in$) 方程 (3.8.1) 的任意正向有界解可以延拓到 $+\infty$;

($\mathcal{B}_\ni$) 对任意 $\alpha>0$, 存在 $K(\alpha)>0$, 使得只要 $|\varphi|<\alpha$ 就有

$$|f(t,\varphi)|\leqslant K(\alpha).$$

定义 3.8.1　*设 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$ 是方程 (3.8.1) 的解, $p\in\mathbb{R}^n$, 如果存在序列 $\{t_n\}$, 使得当 $n\to+\infty$ 时有 $t_n\to+\infty$, $x(t_n)\to p$, 则 p 称为是 $x(t)$ 的 ω 极限点. $x(t)$ 的所有 ω 极限点构成其 ω 极限集. 记为 $\Omega(x(t))$.*

定理 3.8.1 设 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$ 是方程 (3.8.1) 的解, 对某个 $\alpha\geqslant 0$ 和 $t\geqslant\sigma\geqslant 0$ 有 $|\varphi|\leqslant\alpha$, $|x(t)|\leqslant\alpha$. 如果存在非负泛函 $V(t,\varphi)$ 和连续非负函数 $W(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ 以及可积函数 η_i, $i=1,2$, $\int_0^{+\infty}|\eta_i(t)|\mathrm{d}t<+\infty$, 使得

$$V'_{(3.8.1)}(t,x_t)\leqslant -W(x(t))+\eta_1(t)V(t,x_t)+\eta_2(t),\quad t\geqslant\sigma,$$

则有

$$x(t)\to E=\{x\in\mathbb{R}^n|W(x)=0\},\quad t\to+\infty,$$

即 $\Omega(x(t))\subset E=\{x\in\mathbb{R}^n|W(x)=0\}$.

证明 设 $x\in A\subset\mathbb{R}^n$, 其中, A 是有界区域. 定义 $\bar V(t,\varphi)=V(t,\varphi)+1$. 显然 $\bar V(t,\varphi)\geqslant 1$ 且有

$$\bar V'_{(3.8.1)}(t,x_t)\leqslant -W(x(t))+\eta_1(t)\bar V(t,x_t)-\eta_1(t)+\eta_2(t),\quad t\geqslant\sigma.$$

因此有

$$\frac{\bar V'_{(3.8.1)}(t,x_t)}{\bar V(t,x_t)}-\eta_1(t)-\frac{\eta_2(t)-\eta_1(t)}{\bar V(s)}\leqslant 0,\quad t\geqslant\sigma.$$

因而函数

$$n(t)=\int_\sigma^t\frac{\bar V'(s)}{\bar V(s)}\mathrm{d}s-\int_\sigma^t\frac{\eta_2(s)-\eta_1(s)}{\bar V(t,x_t)}\mathrm{d}s-\int_\sigma^t\eta_1(s)\mathrm{d}s$$

是不增的, 其中, $\bar V(s)=\bar V(s,x_s)$. 由 $n(\sigma)=0$ 知, $n(t)\leqslant 0$, $t\geqslant\sigma$ 及 $n(+\infty)\leqslant 0$. 如果 $n(+\infty)=-\infty$, 则有

$$\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{\bar V(t)}{\bar V(\sigma)}=-\infty,\quad \lim_{t\to+\infty}\bar V(t)=0.$$

这与 $\bar V(t)\geqslant 1$ 相矛盾. 因此有 $n(+\infty)>-\infty$. 因为

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{\bar V(t)}{\bar V(\sigma)}&=n(+\infty)+\int_\sigma^{+\infty}\frac{\eta_2(s)-\eta_1(s)}{\bar V(s)}\mathrm{d}s+\int_\sigma^{+\infty}\eta_1(s)\mathrm{d}s\\&\leqslant n(+\infty)+\int_\sigma^{+\infty}|\eta_2(s)|\mathrm{d}s+2\int_\sigma^{+\infty}|\eta_1(s)|\mathrm{d}s<+\infty,\end{aligned}$$

有

$$\lim_{t\to+\infty}\bar V(t)<+\infty,$$

所以存在 $M > 0$, 使得 $\bar{V}(t) \leqslant M$, $t \geqslant \sigma$. 由 $n(+\infty) > -\infty$ 知, 存在 $T > 0$, 使得当 $t \geqslant \sigma$ 时,$n(t) > -T$. 由如下事实:

$$n(t) \leqslant -\int_\sigma^t \frac{W(x(s))}{\bar{V}(s)}\mathrm{d}s = \frac{-1}{\bar{V}(\xi)}\int_\sigma^t W(x(s))\mathrm{d}s, \quad \sigma \leqslant \xi \leqslant t$$

得到

$$\int_\sigma^t W(x(s))\mathrm{d}s \leqslant -\bar{V}(\xi)n(t) \leqslant MT, \quad t \geqslant \sigma,$$

有

$$\int_\sigma^{+\infty} W(x(t))\mathrm{d}t \leqslant MT < +\infty. \tag{3.8.2}$$

令 p 是 $x(t)$ 的 ω 极限点. 如果 $p \notin E$, 可以选取 $\delta > 0$, 使得 $W(p) > 2\delta > 0$. 存在 $\varepsilon > 0$, 使得只要

$$x \in S_{2\varepsilon}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x - p| < 2\varepsilon\},$$

就有 $W(x) > \delta$.

如果对 $x(t) \in S_{2\varepsilon}(p)$, $t \geqslant \sigma$, 则有

$$\int_t^{+\infty} W(x(s))\mathrm{d}s > \int_t^{+\infty} \delta\mathrm{d}s = +\infty.$$

这与 (3.8.2) 相矛盾. 因此 $x(t)$ 不能永远待在 $S_{2\varepsilon}(p)$ 中. 另一方面, 因为 p 是 $x(t)$ 的 ω 极限点, 故 $x(t)$ 必须在某一时刻 $t_1 > \sigma$ 进入 $S_\varepsilon(p)$. 这说明存在时间序列

$$\sigma < t_1 < t_1' < t_2 < t_2' < \cdots < t_m < t_m' < \cdots,$$

使得在时刻 t_m 解曲线 $x(t)$ 进入球 $S_\varepsilon(p)$, 而在时刻 t_m', 它离开球 $S_{2\varepsilon}(p)$. 由

$$|f(t, x_t)| \leqslant K(\alpha), \quad t \geqslant \sigma$$

可以得到

$$\begin{aligned} t_m' - t_m &= \int_{t_m}^{t_m'} \mathrm{d}s \geqslant \int_{t_m}^{t_m'} \frac{|f(t, x_t)|}{K}\mathrm{d}t = \frac{1}{K}\int_{t_m}^{t_m'} |x'(t)|\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1}{K}\left|\int_{t_m}^{t_m'} x'(t)\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{K}|x(t_m) - x(t_m')| \geqslant \frac{\varepsilon}{K} \end{aligned}$$

和

$$\int_{\sigma}^{+\infty} W(x(s))\mathrm{d}s \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_m}^{t'_m} W(x(s))\mathrm{d}s \geqslant \delta \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_m}^{t'_m} \mathrm{d}s = +\infty.$$

这与 (3.8.2) 矛盾, 此矛盾证明了 $p \in E$. 定理证毕. ∎

定理 3.8.1 强烈地依赖于解的有界性, 下面提供几个保证方程 (3.8.1) 的解有界的定理.

定理 3.8.2 设存在泛函 $V(t,\varphi)$、楔函数 $W_i(r)(i=1,2,3,4)$、半楔函数 $W(r)$ 以及常数 $U>0$, 使得方程 (3.8.1) 的任意解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$ 满足

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t,x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_B)$, $t \geqslant \sigma$;

(2) $V'_{(3.8.1)}(t,x_t) \leqslant -W(|x(t)|) - |W'_{4(3.8.1)}(|x(t)|)|$, $|x(t)| \geqslant U$;

(3) $\lim\limits_{r\to+\infty}(2W_4(r) - W_3(H+Lr)) = +\infty$, $H>0$,

则方程 (3.8.1) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致有界的.

定理的证明与定理 2.2.1 的证明类似, 此处从略.

推论 3.8.1 如果定理 3.8.2 的所有条件 (条件 (2) 除外) 都满足且有

$$V'_{(3.8.1)}(t,x_t) \leqslant -W(|x(t)|) - |W'_{4(3.8.1)}(|x(t)|)| + \eta_1(t)V(t,x_t) + \eta_2(t), \quad t \geqslant \sigma,$$

其中, $\eta_i(t)(i=1,2)$ 是绝对可积函数, 则对方程 (3.8.1) 的任意解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$ 有

$$x(t) \to E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0\}, \quad t \to +\infty.$$

下面相应于推论 3.8.1, 可以对空间 BC, $\mathscr{C}_g$ 和 $\mathscr{C}_h$ 分别建立相应的推论.

推论 3.8.2 如果存在泛函 $V(t,\varphi)$、楔函数 $W_i(r)(i=1,2,3,4)$、半楔函数 $W(r)$ 及绝对可积函数 $\eta_i(t)(i=1,2)$, 使得方程 (3.8.1) 的任意解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$, $(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times BC$ 满足

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t,x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x|^{(-\infty,t]})$;

(2) $V'_{(3.8.1)}(t,x_t) \leqslant -W(|x(t)|) - |W'_{4(3.8.1)}(|x(t)|)| + \eta_1(t)V(t,x_t) + \eta_2(t)$, $t \geqslant \sigma$;

(3) $\lim\limits_{r\to+\infty}(2W_4(r) - W_3(r)) = +\infty$,

则对所有方程 (3.8.1) 的解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$,$(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times BC$ 有

$$x(t) \to E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0\}, \quad t \to +\infty.$$

当把空间取为 $\mathscr{C}_g$ 时有

推论 3.8.3 如果存在泛函 $V(t,\varphi)$、楔函数 $W_i(r)(i=1,2,3,4)$、半楔函数 $w(r)$ 及绝对可积函数 $\eta_i(t)(i=1,2)$, 使得方程 (3.8.1) 的任意解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$, $(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_g$ 有

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_g)$;

(2) $V'_{(3.8.1)}(t, x_t) \leqslant -W(|x(t)|) - |W'_{4(3.8.1)}(|x(t)|)| + \eta_1(t)V(t, x_t) + \eta_2(t),\ t \geqslant \sigma$;

(3) $\lim\limits_{r\to+\infty}(2W_4(r) - W_3(r + H)) = +\infty,\ H > 0$,

则对方程 (3.8.1) 的所有解 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t)$, $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_g$ 有

$$x(t) \to E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0\}, \quad t \to +\infty.$$

对 $\mathscr{C}_h$ 空间有

推论 3.8.4　如果存在泛函 $V(t, \varphi)$、楔函数 $W_i(r)(i = 1, 2, 3, 4)$、半楔函数 $W(r)$ 及绝对可积函数 $\eta_i(t)(i = 1, 2)$, 使得方程 (3.8.1) 的任意解 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t)$, $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h$ 有

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_h),\ t \geqslant \sigma$;

(2) $V'_{(3.8.1)}(t, x_t) \leqslant -W(|x(t)|) - |W'_{4(3.8.1)}(|x(t)|)| + \eta_1(t)V(t, x_t) + \eta_2(t),\ t \geqslant \sigma$;

(3) $\lim_{r\to+\infty}(2W_4(r) - W_3(H + lr)) = +\infty,\ H > 0$,

则对方程 (3.8.1) 的所有解 $x(\sigma, \varphi)(t)$, $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_h$ 有

$$x(\sigma, \varphi)(t) \to E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0\}, \quad t \to +\infty.$$

为了更精确地确定 ω 极限集的位置, 需要研究解的最终有界性.

定理 3.8.3　设存在 $\mathscr{B}$ 一致健忘的泛函 $V(t, \varphi)$ 满足定理 3.8.2 的所有条件, 则方程 (3.8.1) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的.

证明类似于定理 2.2.2 的证明, 此处从略.

定理 3.8.4　如果推论 3.8.1 的条件满足且泛函 $V(t, \varphi)$ 是 $\mathscr{B}$ 一致健忘的, 则方程 (3.8.1) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的, 方程 (3.8.1) 的解的 ω 极限集在集合

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0, |x| \leqslant b\}$$

之中, 其中, b 是方程 (3.8.1) 的一致最终有界的界.

证明从略.

引理 3.8.1　如果 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 中连续且 $\eta_1(t) \leqslant -c, |\eta_2(t)| \leqslant M$, 其中, c 和 M 是正常数, 则方程

$$y' = \eta_1(t)y + \eta_2(t) \tag{3.8.3}$$

的解是一致最终有界的, 其界为 $2Mc^{-1}$.

证明　方程 (3.8.3) 的满足 $y(\sigma) = y_0$ 的解可以表示为

$$y(t) = y_0 \exp\left\{\int_\sigma^t \eta_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} + \int_\sigma^t \eta_2(s) \exp\left\{\int_s^t \eta_1(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \mathrm{d}s.$$

如果 $|y_0| \leqslant H$, 则有

$$\begin{aligned}|y(t)| &\leqslant H\mathrm{e}^{-c(t-\sigma)} + \int_\sigma^t M\mathrm{e}^{-c(t-s)}\mathrm{d}s \\ &= H\mathrm{e}^{-c(t-\sigma)} + Mc^{-1}(1-\mathrm{e}^{-c(t-\sigma)}).\end{aligned}$$

易见存在与 (σ, y_0) 无关的 $T(H) > 0$, 使得只要 $|y_0| \leqslant H,\ t \geqslant \sigma + T$ 就有 $|y(t)| \leqslant 2Mc^{-1}$. ■

定理 3.8.5 如果存在泛函 $V(t,\varphi): \mathbb{R} \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}^+$, 楔函数 $W_1(r)$, $W_2(r)$ 和 $W_3(r)$ 及连续函数 $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ 满足 $\eta_1(t) \leqslant -c$, $|\eta_2(t)| \leqslant M$, 使得对方程 (3.8.1) 的任意解 $x(t) = x(\sigma,\varphi)(t)$, 下面条件成立:

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t,x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_B)$;

(2) $V'_{(3.8.1)}(t,x_t) \leqslant \eta_1(t)V(t,x_t) + \eta_2(t),\ t \geqslant \sigma$,

则方程 (3.8.1) 的解是 $\mathscr{B}$-$\mathbb{R}^n$ 一致最终有界的, 其界为 $W_1^{-1}(2Mc^{-1})$.

证明 由条件 (2) 和引理 3.8.1 知, 存在与 (σ,φ) 无关的 $T(H) > 0$, 使得只要 $|\varphi| \leqslant H,\ t \geqslant \sigma + T$ 就有

$$V(t,x_t) \leqslant 2Mc^{-1}.$$

由条件 (1) 得到

$$|x(\sigma,\varphi)(t)| \leqslant W_1^{-1}(2Mc^{-1}), \quad t \geqslant \sigma + T.$$ ■

推论 3.8.5 如果存在泛函 $V(t,\varphi)$、楔函数 $W_i(r)(i=1,2,3)$、半楔函数 $W(r)$ 和连续函数 $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ 满足 $\eta_1(t) \leqslant -c$, $|\eta_2(t)| \leqslant M$, $\int_\sigma^{+\infty} |\eta_2(t)|\mathrm{d}t < +\infty$, 使得对方程 (3.8.1) 的任意解 $x(t)$, 下面条件成立:

(1) $W_1(|x(t)|) \leqslant V(t,x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(|x_t|_B)$;

(2) $V'_{(3.8.1)}(t,x_t) \leqslant -W(|x(t)|) + \eta_1(t)V(t,x_t) + \eta_2(t),\ t \geqslant \sigma$,

则对方程 (3.8.1) 的所有解 $x(\sigma,\varphi)(t)$, $(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{B}$ 有

$$x(\sigma,\varphi)(t) \to E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0,\ |x| \leqslant W_1^{-1}(2Mc^{-1})\}, \quad t \to +\infty.$$

与前面类似, 对空间 BC, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ 可以得到相应的推论, 为简捷起见, 此处从略.

引理 3.8.2 如果定理 3.8.1 的条件成立且集合 $E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0\}$ 是至多可数的, 则存在 $p \in E$, 使得

$$x(t) \to p, \quad t \to +\infty.$$

证明　设 Ω 是 $x(t)$ 的所有 ω 极限点所构成的集合, 显然有 $\Omega \subset E$, 故 Ω 也是至多可数的.

如果 Ω 中元素的个数大于 1. 可令 $\Omega = \{p_i\}_{i=1}^{c}$, $c < +\infty$ 或 $c = +\infty$, $c \geqslant 2$. Ω 中至少有一个孤立点, 不失一般性, 设为 p_1 . 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时有

$$S_\varepsilon(p_1)\bigcap\bigcup_{i=2}^{c} S_\varepsilon(p_i) = \varnothing.$$

因为当 $t \to +\infty$ 时 $x(t) \to \Omega$, 故有

$$\{x(t)|t \geqslant M\} \subset \bigcup_{i=1}^{c} S_\varepsilon(p_i),$$

其中, $M > 0$ 是一个充分大的正数. 但集合 $\{x(t)|t \geqslant M\}$ 是连通的, 而集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{c} S_\varepsilon(p_i)$ 是不连通的且 p_i, $i = 1, 2, \cdots, c$ 都是 ω 极限点. 这是一个矛盾, 因此 Ω 是一个单点集. ∎

推论 3.8.6　*如果推论 3.8.1 ∼ 推论 3.8.3 之一的条件成立, 且集合 $E = \{x \in \mathbb{R}^n | W(|x|) = 0\}$ 是至多可数的, 则对方程 (3.8.1) 的每个解 $x(\sigma, \varphi)(t)$, 存在点 (可能依赖于解)$p \in E$, 使得*

$$x(\sigma, \varphi)(t) \to p, \quad t \to +\infty.$$

因为上面的结果以解的有界性为基础, 而关于有界性已经有了很多好的结果 (如文献 [16, 76, 88, 129, 165, 166, 182]). 为简单起见, 此处不一一列举上述文献中的结果, 仅通过几个具体的例子来说明如何确定集合 E, 以及如何大致确定 ω 极限集的位置.

例 3.8.1　考虑下面的纯量方程:

$$x'(t) = A(t)G(x(t)) + \int_{-\infty}^{t} D(t, s)G(x(s))\mathrm{d}s + f(t), \tag{3.8.4}$$

其中,

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} |D(u, s)|\mathrm{d}u\mathrm{d}s \leqslant \beta < +\infty$;

(2) $G(x), x \in \mathbb{R}$ 是可微的奇函数且当 $x \in \mathbb{R}^+$ 时是半楔函数;

(3) 存在 $1 < k < 2$ 和 $\delta > 0$, 使得

$$(2 - k)A(t) + k\int_{t}^{+\infty} |D(u, t)|\mathrm{d}u \leqslant -\delta < 0;$$

(4) $|f(t)| \leqslant M, \int_t^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < +\infty, \ t \geqslant 0;$

(5) $\lim_{r\to+\infty} G'(r) < \dfrac{2(k-1)}{k\beta}$.

在 BC 空间中考虑问题. 定义

$$V(t,x_t) = |x(t)| + k\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} |D(u,s)||G(x(s))|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

有

$$|x(t)| \leqslant V(t,x_t) \leqslant |x(t)| + k\beta H(|x|^{(-\infty,t]}),$$

其中, $H(r) = \max_{0\leqslant x\leqslant r} |G(x)|$. 还有

$$\begin{aligned} V'_{(3.8.4)}(t,x_t) &\leqslant \left\{(2-k)A(t) + k\int_t^{+\infty} |D(u,t)|\mathrm{d}u\right\} G(|x(t)|) \\ &\quad +(1-k)||x(t)|'| + k|f(t)| \\ &\leqslant -\delta G(|x(t)|) + (1-k)||x(t)|'| + k|f(t)|, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

令

$$W_1(r) = W_2(r) = r, \quad W_3(r) = k\beta H(r), \quad W_4(r) = (k-1)r, \quad W(r) = \delta G(r),$$

显然有

$$\lim_{r\to+\infty} (2W_4(r) - W_3(r)) = +\infty.$$

由推论 3.8.2 知方程 (3.8.4) 的所有解 $x(t)$, 当 $t \to +\infty$ 时都趋于集合

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n | G(x) = 0, \ x \geqslant 0\}.$$

例 3.8.2 考虑纯量方程

$$x'(t) = -(2+\sin t)W(x(t)) + \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{s-t} W(x(s))\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-t}, \tag{3.8.5}$$

其中,

$$W(r) = \beta r(r^2-a_1)^2(r^2-a_2)^2\cdots(r^2-a_m)^2 + \frac{1}{2}r, \quad \beta > 0.$$

令

$$V(t,x_t) = |x(t)| + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{s-u}|W(x(s))|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

有

$$\begin{aligned}|x(t)| \leqslant V(t,x_t) &\leqslant |x(t)| + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} |W(x(s+t))|\mathrm{e}^{s+t}\left(\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \\ &= |x(t)| + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} |W(x(s+t))|\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s \\ &\leqslant |x(t)| + \frac{1}{2}H(|x|^{(-\infty,t]}) \\ &\leqslant |x(t)| + H(|x|^{(-\infty,t]}),\end{aligned}$$

其中, $H(r) = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant r} |W(x)|$. 还有

$$\begin{aligned}V'_{(3.8.5)}(t,x_t) &\leqslant -|W(x(t))| - \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{s-t}|W(x(s))|\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}|W(x(t))| \\ &= -\frac{1}{2}W(|x(t)|) - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{s-u}|W(x(s))|\mathrm{d}u\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-t} \\ &\leqslant -\left[\frac{1}{2}W(|x(t)|) - \frac{1}{4}|x(t)|\right] - \frac{1}{4}V(t,x_t) + \mathrm{e}^{-t}.\end{aligned}$$

易见 $W^*(r) = \frac{1}{2}W(r) - \frac{1}{4}r,\ r \geqslant 0$ 是个半楔函数.集合 $\{x \in \mathbb{R}|W^*(x) = 0\}$ 是个有限集. 因此, 由推论 3.8.5 和引理 3.8.2 知, 对方程 (3.8.5) 的每个满足 $(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times BC$ 的解 $x(\sigma,\varphi)(t)$, 都存在一个点

$$p \in E = \{0, \sqrt{a_j},\ 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

使得当 $t \to +\infty$ 时, 有 $x(\sigma,\varphi)(t) \to p$.

第 4 章　伪度量相空间

对于具有无限时滞的泛函微分方程, 初始函数空间的选择是非常重要的. 前面所讨论的相空间都是拟赋范线性空间. 本章把相空间的范围扩大到伪度量空间, 并应用伪度量相空间理论讨论具有无限时滞的滞后型泛函微分方程的局部理论、解的有界性和周期性等.

4.1 伪度量空间

设 $\hat{\mathscr{B}}$ 是一类由 $\mathbb{R}^-$ 映到 $\mathbb{R}^n$ 的实函数所构成的实向量空间, 其元素记为 $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}, \cdots$.

定义 4.1.1　*设映射 $\hat{\rho}: \hat{\mathscr{B}} \times \hat{\mathscr{B}} \to \mathbb{R}^+$ 满足*

(1) $\hat{\rho}(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}) = 0,\ \hat{\varphi} \in \hat{\mathscr{B}}$;

(2) $\hat{\rho}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \hat{\rho}(\hat{\psi}, \hat{\varphi})$;

(3) $\hat{\rho}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \leqslant \hat{\rho}(\hat{\varphi}, \hat{\eta}) + \hat{\rho}(\hat{\eta}, \hat{\psi}),\ \hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\eta} \in \hat{\mathscr{B}}$,

则 $\hat{\rho}$ 称为是 $\hat{\mathscr{B}}$ 上的伪度量, $(\hat{\mathscr{B}}, \hat{\rho})$ 称为是伪度量空间.

在 $(\hat{\mathscr{B}}, \hat{\rho})$ 中, 定义

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\hat{\varphi}) := \{\hat{\psi} \in \hat{\mathscr{B}} | \hat{\rho}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) < \varepsilon\}.$$

容易证明集族

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\varepsilon(\hat{\varphi}) | \varepsilon > 0, \hat{\varphi} \in \hat{\mathscr{B}}\}$$

是 $\hat{\mathscr{B}}$ 的拓扑基. 称 $\hat{\mathscr{B}}$ 上由 $\hat{\rho}$ 诱导的拓扑为伪度量拓扑. 在 $\hat{\mathscr{B}}$ 中定义关系 $\sim$ 如下:

$$\hat{\varphi} \sim \hat{\psi} \Leftrightarrow \hat{\rho}(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = 0.$$

容易证明 $\sim$ 是 $\hat{\mathscr{B}}$ 上的等价关系. 设 $\hat{\mathscr{B}}$ 关于 $\sim$ 的商空间为

$$\mathscr{B} = \hat{\mathscr{B}} / \sim = \hat{\mathscr{B}} / \hat{\rho} = \{\varphi \subset \hat{\mathscr{B}} | \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \varphi \Rightarrow \hat{\rho}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) = 0\}.$$

$\mathscr{B}$ 中的元素用 φ, ψ 表示, 它们对应于 $\hat{\mathscr{B}}$ 中由等价关系 $\sim$ 所确定的等价类. 对任意的 $\varphi \in \mathscr{B}$, 与之对应的等价类中相应的元记为 $\hat{\varphi}$.

注 4.1.1　度量诱导的拓扑与伪度量诱导的拓扑有着本质的区别, 度量拓扑总是 T_4 的. 然而, 一般情况下, 伪度量拓扑甚至不是 T_0 的. 事实上, 对于 $\hat{\mathscr{B}}$ 中的不

同的 $\hat{\varphi}$ 和 $\hat{\psi}$, 可能有 $\hat{\rho}(\hat{\varphi},\hat{\psi})=0$, 从而, 任何包含 $\hat{\varphi}$ 的开球都包含 $\hat{\psi}$, 反之亦然, 因此任何开集合均不能将二者分开.

引理 4.1.1　如果 $\varphi,\psi\in\mathscr{B}$, $\hat{\varphi},\hat{\varphi}_1\in\varphi$, $\hat{\psi},\hat{\psi}_1\in\psi$, 则有

$$\hat{\rho}(\hat{\varphi},\hat{\psi})=\hat{\rho}(\hat{\varphi}_1,\hat{\psi}_1).$$

证明简单, 此处从略.

由引理 4.1.1 可以用如下方式定义 $\mathscr{B}$ 上的度量 ρ:

$$\rho(\varphi,\psi)=\hat{\rho}(\hat{\varphi},\hat{\psi}),\quad \hat{\varphi}\in\varphi,\quad \hat{\psi}\in\psi.$$

不难证明以下引理:

引理 4.1.2　$(\mathscr{B},\rho)$ 是度量空间.

对 $\beta\geqslant 0$, $\hat{\varphi}\in\hat{\mathscr{B}}$, 记 $\hat{\varphi}^\beta$ 为 $\hat{\varphi}$ 在 $(-\infty,-\beta]$ 上的限制. 定义映射 $\rho_\beta:\mathscr{B}\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^+$ 如下:

$$\rho_\beta(\varphi_1,\varphi_2)=\inf_{\hat{\varphi}_1,\hat{\varphi}_2\in\hat{\mathscr{B}}}\{\inf_{\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2\in\hat{\mathscr{B}}}\{\hat{\rho}(\hat{\psi}_1,\hat{\psi}_2)|\hat{\psi}_1^\beta=\hat{\varphi}_1^\beta,\ \hat{\psi}_2^\beta=\hat{\varphi}_2^\beta\}\},\quad \varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{B}.$$

引理 4.1.3　ρ_β 是 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的映射.

证明从略.

设

$$\hat{\mathscr{B}}^\beta=\{\{\hat{\psi}\in\hat{\mathscr{B}}|\hat{\psi}^\beta=\hat{\varphi}^\beta\}|\hat{\varphi}\in\hat{\mathscr{B}}\}.$$

对任意 $\beta\geqslant 0$, 定义线性算子 $\hat{\tau}^\beta:\hat{\mathscr{B}}\to\hat{\mathscr{B}}^\beta$ 如下: 对任意给定的 $\hat{\varphi}\in\hat{\mathscr{B}}$, $\hat{\psi}\in\hat{\tau}^\beta\hat{\varphi}$ 当且仅当对所有的 $\theta\in(-\infty,-\beta]$ 有 $\hat{\psi}(\theta)=\hat{\varphi}(\theta+\beta)$.

对于定义在 $(-\infty,A]$ 上取值于 $\mathbb{R}^n$ 的函数 $\hat{x}$, 当 $t\in[0,A]$ 时, 定义 $\hat{x}_t$ 为

$$\hat{x}_t(\theta)=\hat{x}(t+\theta),\quad \theta\in\mathbb{R}^-.$$

给定 $A>0$ 和 $\hat{\varphi}\in\hat{\mathscr{B}}$, 令

$$F_A(\hat{\varphi})=\{\hat{x}:(-\infty,A]\to\mathbb{R}^n|\hat{x}_0=\hat{\varphi},\hat{x}(t)\text{在}[0,A]\text{上连续}\}$$

及

$$F_A=\bigcup\{F_A(\hat{\varphi})|\hat{\varphi}\in\hat{\mathscr{B}}\}.$$

首先给出 $\mathscr{B}$ 空间的 (A) 公理:

(A_1) 对任意的 $\hat{x}\in F_A$, 对任意的 $t\in[0,A]$ 有 $\hat{x}_t\in\hat{\mathscr{B}}$.

现以 x_t 表示 $\mathscr{B}$ 中对应于 $\hat{x}_t$ 的元素. 在此公理下, 对于任意的 $\beta \geqslant 0$ 和 $\hat{\varphi} \in \hat{\mathscr{B}}$, 能找到 $\hat{\psi} \in \hat{\mathscr{B}}$, 使得

$$\hat{\psi}(\theta) = \hat{\varphi}(\theta + \beta), \quad \theta \in (-\infty, -\beta].$$

(A_2) 若 $\mathscr{B}$ 中两元素相等, 即 $\varphi, \psi \in \mathscr{B}$, $\varphi = \psi$, 则对任意的 $\beta > 0$, 有 $\rho_\beta(\eta, \xi) = 0$, 其中, $\hat{\eta} \in \hat{\tau}^\beta \hat{\varphi}, \hat{\xi} \in \hat{\tau}^\beta \hat{\psi}$.

定义

$$|\varphi|^{[-\beta,0]} = \inf_{\hat{\varphi} \in \varphi} \{ \sup_{-\beta \leqslant \theta \leqslant 0} |\hat{\varphi}(\theta)| \}.$$

(A_3) 对任意 $\varphi, \psi \in \mathscr{B}$ 有

$$\rho(\varphi, \psi) \leqslant \rho_\beta(\varphi, \psi) + K_1(\beta, \alpha)|\varphi - \psi|^{[-\beta,0]},$$

其中, $\alpha = \max\{|\varphi|^{[-\beta,0]}, |\psi|^{[-\beta,0]}\}$, $K_1(\beta, \alpha)$ 关于 β 连续且关于 α 不减.

(A_4') 如果 $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi} \in \hat{\mathscr{B}}$ 且 $\hat{\varphi} \to \hat{\psi}$, 则 $\hat{\varphi}(0) \to \hat{\psi}(0)$.

因此对 $\varphi \in \mathscr{B}$, $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \in \varphi$, 则有 $\hat{\varphi}_1(0) = \hat{\varphi}_2(0)$, 因而可用 $\varphi(0)$ 表示, 故 (A_4') 可以写成

(A_4) 如果 φ, $\psi \in \mathscr{B}$ 且 $\varphi \to \psi$, 则 $\varphi(0) \to \psi(0)$.

引理 4.1.4 *假设* (A_1) $\sim$ (A_4) *成立. 如果* $x_0 = y_0$ *且对* $\hat{x}, \hat{y} \in F_A$, *如果* $\hat{x}(t) = \hat{y}(t)$, $t \in [0, A]$, *就有* $x_t = y_t, t \in [0, A]$.

证明 (A_1) 保证 x_t, y_t 的存在性, 而条件 (A_2) 则保证 $\rho_\beta(x_t, y_t) = 0$. 另一方面, 因为当 $t \in [0, A]$ 时, $\hat{x}(t) = \hat{y}(t)$, 故有 $|\hat{x}_t - \hat{y}_t|^{[-t,0]} = 0$. 由 ($A_3$) 得 $\rho(x_t, y_t) = 0$. 因此 $x_t = y_t$. 证毕. ∎

以上是 $\mathscr{B}$ 空间的基本公理. 在本章假定公理 (A_1) $\sim$ (A_4) 总是满足的, 由这些基本公理及引理 4.1.4, 可以使用相同的符号 φ 去表示 $\mathscr{B}$ 或 $\hat{\mathscr{B}}$ 中的元素而不至引起混淆. 因此在本章, 将只在相空间 $\mathscr{B}$ 中来研究具有无限时滞的 RFDE.

下面给出一个具体的满足 (A) 公理的空间 $\mathscr{B}$.

例 4.1.1 设

(1) $\mu(s) : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ 是右连续、单调不减的函数.

(2) $h(s) : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ 连续且满足 $\int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}\mu(s) = l < \infty$ (上面的积分是 Lebesgue-Stieltjes 意义下的).

(3) $F(\tau) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是连续单调增加函数且 $F(a) = 0$ 当且仅当 $a = 0$, 又有 $F(a + b) < F(a) + F(b)$, 而且其在 $\tau = 0$ 时的右导数 $F'(0) < \infty$.

(4) $p(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在任意 $|x| \leqslant \alpha$ 上是局部 Lipschitz 的且 $p(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

定义映射 $P:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 如下:

设 $\varphi\in\mathscr{C}$, 令 $P(\varphi)(s)=p(\varphi(s))$, $s\in\mathbb{R}^-$. 令

$$S=\left\{\varphi\in\mathscr{C}\,\Bigg|\,\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|P(\varphi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)<\infty\right\},$$

S 显然不空, 因为 $\varphi\equiv 0\in S$.

对任意 φ, $\psi\in S$, 定义

$$\hat{\rho}^*(\varphi,\psi)=\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)<\infty.$$

引理 4.1.5 $\hat{\rho}^*$ 是 S 中的伪度量. 如果对任意 $h(s)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上恒不为零且 $p(x)=p(y)$ 当且仅当 $x=y$, 则 $\hat{\rho}^*$ 是 S 中的度量.

证明 对任意 $\varphi,\psi\in S$,

$$\hat{\rho}^*(\varphi,\psi)\leqslant\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|P(\varphi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)+\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)<\infty.$$

对任意 $\varphi,\psi,\eta\in S$, 容易验证

$$\hat{\rho}^*(\varphi,\psi)\leqslant\hat{\rho}^*(\varphi,\eta)+\hat{\rho}^*(\eta,\psi).$$

显然有 $\hat{\rho}^*(\varphi,\varphi)=0$, 故 $\hat{\rho}^*$ 是 S 上的伪度量, 从而 $(S,\hat{\rho}^*)$ 是伪度量空间, 把它简记为 $C_{\hat{\rho}^*}$.

由条件 (1)~(4), 只要 $\hat{\rho}^*(\varphi,\psi)=0$ 就有

$$|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]}\equiv 0,\quad s\in\mathbb{R}^-,$$

所以 $P(\varphi)(\theta)\equiv P(\psi)(\theta)$, $\theta\leqslant 0$, 即 $p(\varphi(\theta))\equiv p(\psi(\theta))$, $\theta\leqslant 0$, 由此知 $\varphi=\psi$, 故 $\hat{\rho}^*$ 是一个度量. 引理证毕. ∎

本章总假设例 4.1.1 的条件 (1) ~ (4) 成立. 因此省略 $\hat{\rho}^*$ 上的 "^" 而简记为 ρ^*.

引理 4.1.6 设例 4.1.1 的条件 (1) ~ (4) 成立, 则 C_{ρ^*} 满足公理 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_4)$.

证明 首先检验 (A_1). 设 $\hat{x}\in F_A$, $t\in[0,A]$, $\hat{x}_0=\hat{\varphi}\in C_{\rho^*}$, 则有

$$|P(\hat{x}_t)|^{[s,0]}\leqslant|P(\hat{x})|^{[0,A]}+|P(\hat{\varphi})|^{[s,0]}$$

且当 $t\in[0,A]$ 时, $\hat{x}\in C_{\rho^*}$.

对任意 $\beta \geqslant 0$, 若 $\varphi = \psi$, $\varphi, \psi \in C_{\rho^*}$, $\eta^\beta = \varphi^\beta, \xi^\beta = \psi^\beta$, 则有

$$\begin{aligned}\rho_\beta^*(\eta,\xi) &= \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\eta)-P(\xi)|^{[s,-\beta]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &= \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,-\beta]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) = \rho^*(\varphi,\psi) = 0,\end{aligned}$$

即 $\rho_\beta^*(\eta,\xi) = 0$, 故 (A_2) 成立.

对任意 $\varphi, \psi \in C_{\rho^*}$ 有

$$\begin{aligned}\rho^*(\varphi,\psi) &= \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{-\beta} + \int_{-\beta}^{0}\right) h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,-\beta]} + |P(\varphi)-P(\psi)|^{[-\beta,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &\quad + \int_{-\beta}^{0} h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &\leqslant \rho_\beta^*(\varphi,\psi) + 2lF(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[-\beta,0]}).\end{aligned}$$

我们断言

$$F(\tau) \leqslant (F'(0)+1)\tau := k\tau, \quad \tau \geqslant 0. \tag{4.1.1}$$

如若不然, 则存在 $\tau_1 > 0$, 使得 $F(\tau_1) > k\tau_1$. 注意到 $F'(0) < \infty$, 所以由右导数定义有

$$F(\tau) = F'(0)\tau + \tau \cdot o(\tau),$$

其中, $o(\tau)$ $(\tau \to 0)$ 为 τ 的高阶无穷小. 因此可以找到 $\varepsilon > 0$, 使得只要 $\tau \in [0,\varepsilon]$ 就有 $F(\tau) < k\tau$. 设正整数 m 充分大, 使得 $\tau_1/m < \varepsilon$, 于是

$$F(\tau_1) = F\left(m \cdot \frac{\tau_1}{m}\right) \leqslant mF\left(\frac{\tau_1}{m}\right) < mk \cdot \frac{\tau_1}{m} = k\tau_1.$$

此矛盾证明了式 (4.1.1) 成立. 于是有

$$F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[-\beta,0]}) \leqslant F(L_\alpha|\varphi-\psi|^{[-\beta,0]}) \leqslant kL_\alpha|\varphi-\psi|^{[-\beta,0]},$$

其中,

$$\alpha = \max_{-\beta \leqslant s \leqslant 0}\{|\varphi(s)|, |\psi(s)|\},$$

而 L_α 是 $p(x)$ 在有界闭集 $|x| \leqslant \alpha$ 上的局部 Lipschitz 常数. 这就证明了 (A_3).

最后来证明 (A_4). 有

$$\begin{aligned}\rho^*(\varphi,\psi) &= \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &\geqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|p(\varphi(0))-p(\psi(0))|)\mathrm{d}\mu(s)\\ &= lF(|p(\varphi(0))-p(\psi(0))|).\end{aligned}$$

于是, 只要 $\rho^*(\varphi,\psi)\to 0$ 就有 $F(|p(\varphi(0))-p(\psi(0))|)\to 0$, 从而有 $p(\varphi(0))\to p(\psi(0))$, 因此得到 $\varphi(0)\to\psi(0)$. 证毕. ∎

4.2 具有无限时滞的滞后型泛函微分方程的局部理论

设 G 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, 考虑初值问题

$$x'(t) = f(t,x_t),\ x_\sigma = \varphi, \quad \varphi\in\mathscr{B}, \tag{4.2.1}$$

其中 $f: G\to\mathbb{R}^n$ 连续.

为了建立具有无限时滞的泛函微分方程的基本理论, 仅有 (A) 公理是不够的, 还需要增加一些假设.

(B_1) 存在连续泛函 $M:\mathbb{R}^+\times\mathscr{B}\times\mathscr{B}\to\mathbb{R}^+$, 使得

$$\rho_\beta(\tau^\beta\varphi,\tau^\beta\psi)\leqslant M_1(\beta,\varphi,\psi), \quad \varphi,\psi\in\mathscr{B}$$

且若 $\varphi_n,\ \varphi_0\in\mathscr{B}$, 则当 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\varphi_n,\varphi_0)=0$ 时, $M_1(t,\varphi_n,\varphi_0)$ 在 $t\in[0,A]$ 上一致收敛于零.

(B_2) 如果 $x\in F_A,\ A>0$, 则 x_t 关于 t 在 $[\sigma,A]$ 上连续.

引理 4.2.1 如果 $x,y:(-\infty,A]\to\mathbb{R}^n$ 在 $[\sigma,A]$ 上连续, $\sigma\in(-\infty,A]$, 又 $x_\sigma,y_\sigma\in\mathscr{B}$, 则

$$\rho(x_t,y_t)\leqslant K_1(t-\sigma,\alpha^*)\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\theta)-y(\theta)| + M_1(t-\sigma,x_\sigma,y_\sigma),$$

其中, $\alpha^* = \max\limits_{\sigma\leqslant t\leqslant A}\{|x(t)|,|y(t)|\}$.

证明 由 (A_3) 有

$$\begin{aligned}\rho(x_t,y_t)&\leqslant K_1(t-\sigma,\alpha^*)|x_t-y_t|^{[-(t-\sigma),0]}+\rho_{t-\sigma}(x_t,y_t)\\&=K_1(t-\sigma,\alpha^*)|x_t-y_t|^{[-(t-\sigma),0]}+\rho_{t-\sigma}(\tau^{t-\sigma}x_\sigma,\tau^{t-\sigma}y_\sigma)\\&\leqslant K_1(t-\sigma,\alpha^*)\sup_{\sigma\leqslant\theta\leqslant t}|x(\theta)-y(\theta)|+M_1(t-\sigma,x_\sigma,y_\sigma).\end{aligned}$$ ∎

下面来考察例 4.1.1.

引理 4.2.2 空间 C_{ρ^*} 满足 (B_1) 和 (B_2).

证明 对任意 $\varphi,\psi\in C_{\rho^*}$ 有

$$\begin{aligned}\rho^*_\beta(\tau^\beta\varphi,\tau^\beta\psi)&=\int_{-\infty}^{-\beta}h(s)F(|P(\tau^\beta\varphi)-P(\tau^\beta\psi)|^{[s,-\beta]})\mathrm{d}\mu(s)\\&=\int_{-\infty}^{-\beta}h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s+\beta,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-\beta}h(s)F(|P(\varphi)-P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\&:=M_1(\beta,\varphi,\psi)\leqslant\rho^*(\varphi,\psi),\end{aligned}$$

故 (B_1) 成立.

下面检验 (B_2). 对任意 $x\in F_A$ 和任意的 $t\in[\sigma,A]$, 由 (A_1) 知 $x_t\in C_{\rho^*}$, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M(t,\varepsilon)>0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{-M(t,\varepsilon)}h(s)F(|P(x_t)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)<\frac{\varepsilon}{4},\qquad\int_{-\infty}^{-M(t,\varepsilon)}h(s)\mathrm{d}\mu(s)<\frac{\varepsilon}{4L},$$

其中, $L\geqslant F(\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant A}|p(x(s))|)=|p(x)|^{[\sigma,A]}$. 对任意的 $t_0\in[\sigma,A]$, 满足 $|t_0-t|$ 充分小, 使得

$$\max_{-M\leqslant\theta\leqslant0}F(|p(x_t(\theta))-p(x_{t_0}(\theta))|)<\frac{\varepsilon}{4L}.$$

如果 $t\geqslant t_0$, 对任意的 $s\in(-\infty,-M(t_0,\varepsilon)]$ 有

$$\begin{aligned}|P(x_t)|^{[s,0]}+|P(x_{t_0})|^{[s,0]}&=|p(x)|^{[s+t,t]}+|P(x_{t_0})|^{[s,0]}\\&\leqslant|p(x)|^{[s+t,t_0]}+|p(x)|^{[t_0,t]}+|P(x_{t_0})|^{[s,0]}\\&\leqslant|p(x)|^{[s+t_0,t_0]}+|p(x)|^{[\sigma,A]}+|P(x_{t_0})|^{[s,0]}\\&=2|P(x_{t_0})|^{[s,0]}+|p(x)|^{[\sigma,A]}.\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\rho^*(x_t, x_{t_0}) &= \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(x_t) - P(x_{t_0})|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{-M(t_0,\varepsilon)} + \int_{-M(t_0,\varepsilon)}^{0} \right) h(s)F(|P(x_t) - P(x_{t_0})|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-M(t_0,\varepsilon)} h(s)F(|P(x_t)|^{[s,0]} + |P(x_{t_0})|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\quad + \int_{-M(t_0,\varepsilon)}^{0} h(s)F(|P(x_t) - P(x_{t_0})|^{[-M(t_0,\varepsilon),0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-M(t_0,\varepsilon)} h(s)F\left(2|P(x_{t_0})|^{[s,0]} + |p(x)|^{[\sigma,A]}\right)\mathrm{d}\mu(s) + \int_{-M(t_0,\varepsilon)}^{0} h(s)\frac{\varepsilon}{4L}\mathrm{d}\mu(s) \\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{-M(t_0,\varepsilon)} h(s)F(|P(x_{t_0})|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-M(t_0,\varepsilon)} Lh(s)\mathrm{d}\mu(s) + \frac{\varepsilon}{4L}\int_{-M(t_0,\varepsilon)}^{0} h(s)\mathrm{d}\mu(s) \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

如果 $t < t_0$, 则对任意的 $s \in (-\infty, -M(t,\varepsilon)]$ 有

$$
\begin{aligned}
|P(x_t)|^{[s,0]} + |P(x_{t_0})|^{[s,0]} &= |p(x)|^{[s+t,t]} + |P(x_{t_0})|^{[s,0]} \\
&= |P(x_t)|^{[s,0]} + |p(x)|^{[s+t_0,t_0]} \\
&\leqslant |P(x_t)|^{[s,0]} + |p(x)|^{[s+t_0,t]} + |p(x)|^{[t,t_0]} \\
&\leqslant |P(x_t)|^{[s,0]} + |p(x)|^{[s+t,t]} + |p(x)|^{[\sigma,A]} \\
&= 2|P(x_t)|^{[s,0]} + |p(x)|^{[\sigma,A]}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\rho^*(x_t, x_{t_0}) &= \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(x_t) - P(x_{t_0})|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{-M(t,\varepsilon)} + \int_{-M(t,\varepsilon)}^{0} \right) h(s)F(|P(x_t) - P(x_{t_0})|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-M(t,\varepsilon)} h(s)F(|P(x_t)|^{[s,0]} + |P(x_{t_0})|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-M(t,\varepsilon)}^{0} h(s)F(|P(x_t)-P(x_{t_0})|^{[-M(t,\varepsilon),0]})\mathrm{d}\mu(s)\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-M(t,\varepsilon)} h(s)F\left(2|P(x_t)|^{[s,0]}+|p(x)|^{[\sigma,A]}\right)\mathrm{d}\mu(s)+\int_{-M(t,\varepsilon)}^{0} h(s)\frac{\varepsilon}{4L}\mathrm{d}\mu(s)\\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{-M(t,\varepsilon)} h(s)F(|P(x_t)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)+\int_{-\infty}^{-M(t,\varepsilon)} Lh(s)\mathrm{d}\mu(s)+\frac{\varepsilon}{4L}\int_{-M(t,\varepsilon)}^{0} h(s)\mathrm{d}\mu(s)\\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}
$$

因此 x_t 关于 t 在 $[\sigma,A]$ 上连续. 证毕. ∎

伪度量空间 C_{ρ^*} 是相当广泛的. 例如, 若令

$$
\mu(s)=[s],\quad h(s)=2^s,\quad F(\tau)=\tau(1+\tau)^{-1},\quad p(x)=x,
$$

则 C_{ρ^*} 成为文献 [87] 中的度量空间, 这里 $[s]$ 指的是不大于 s 的最大整数. 如果令

$$
\mu(s)=s,\quad h(s)>0,\quad F(\tau)=\tau,\quad p(x)=x,
$$

则 C_{ρ^*} 就成为 $\mathscr{C}_h$ 空间.

引理 4.2.3 *初值问题 (4.2.1) 与积分方程*

$$
x(t)=\varphi(0)+\int_{\sigma}^{t} f(s,x_s)\mathrm{d}s
$$

等价.

引理 4.2.4 *设 f 在 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中连续且存在 $M>0$, 使得对任意 $(s,\psi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{B}$, $|f(s,\psi)|\leqslant M$, 则对任意 $b>0$ 和任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{B}$, 初值问题 (4.2.1) 存在解定义在 $[\sigma,\sigma+b]$ 上.*

证明 令

$$
S=\{\psi\in C_1=C([\sigma,\sigma+b]\to\mathbb{R}^n)|\psi(\sigma)=\varphi(0),
$$

$$
|\psi(t_1)-\psi(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|,\ t_1,t_2\in[\sigma,\sigma+b]\}.
$$

易见, 对于通常的上确界模, C_1 成为 Banach 空间且 S 是 C_1 中的一个凸紧集.

对给定的 $\psi\in C_1$, 定义

$$
x^{(\psi)}(t)=\begin{cases}\psi(t), & \sigma\leqslant t\leqslant\sigma+b,\\ \varphi(t-\sigma), & t\leqslant\sigma.\end{cases}
$$

由 (B_2) 知, 对 $s\in[\sigma,\sigma+b]$, $x_s^{(\psi)}\in\mathscr{B}$ 且 $x_s^{(\psi)}$ 在 S 中连续.

定义映射 $F: S \to C_1$ 如下:

$$F(\psi)(t) = \varphi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s^{(\psi)})\mathrm{d}s, \quad t \in [\sigma, \sigma + b].$$

F 显然是由 S 到其自身的映射.

下面来证明 F 的连续性. 设 $\psi_n \in S(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 一致收敛于 $\psi_0 \in \mathscr{B}$. 由引理 4.2.1 知

$$\begin{aligned}\rho(x_s^{(\psi_n)}, x_s^{(\psi_0)}) &\leqslant K_1(s-\sigma, \alpha^*) \sup_{\sigma \leqslant \tau \leqslant s} |x^{(\psi_n)}(\tau) - x^{(\psi_0)}(\tau)| \\ &\quad + M_1(s-\sigma, x_\sigma^{(\psi_n)}, x_\sigma^{(\psi_0)}) \\ &\leqslant K_1(s-\sigma, \alpha^*) \sup_{\sigma \leqslant \tau \leqslant \sigma+b} |\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau)| + M_1(s-\sigma, \varphi, \varphi) \\ &= K_1(s-\sigma, \alpha^*) \sup_{\sigma \leqslant \tau \leqslant \sigma+b} |\psi_n(\tau) - \psi_0(\tau)|.\end{aligned}$$

因为 K_1 对 $s \in [\sigma, \sigma+b]$ 是连续的且 $\alpha^* = \max\limits_{\sigma \leqslant t \leqslant \sigma+b}\{|\psi_n(t)|, n = 0, 1, 2, \cdots\}$, 可以找到常数 K_1^*, 使得

$$\rho(x_s^{(\psi_n)}, x_s^{(\psi_0)}) \leqslant K_1^* |\psi_n - \psi_0|^{[\sigma, \sigma+b]}, \quad s \in [\sigma, \sigma + b].$$

由此立即可得

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_s^{(\psi_n)}, x_s^{(\psi_0)}) = 0.$$

另一方面, 有

$$|F(\psi_n) - F(\psi_0)|^{[\sigma, \sigma+b]} \leqslant \int_\sigma^{\sigma+b} |f(s, x_s^{(\psi_n)}) - f(s, x^{(\psi_0)})|\mathrm{d}s.$$

由控制收敛定理有

$$\lim_{n \to \infty} |F(\psi_n) - F(\psi_0)|^{[\sigma, \sigma+b]} = 0,$$

于是 F 在 S 中是连续的. 由 Schauder-Tychonov 不动点定理知, 映射 F 在 S 中存在不动点. 由此定理得证. ■

引理 4.2.5[36](Tietze-Urysohn 定理)　*设 E 是度量空间, A 是 E 中的闭集, f 是由 A 到 $\mathbb{R}$ 的连续有界映射, 则存在由 E 到 $\mathbb{R}$ 的映射 g, 在 A 上限制等于 f 且满足*

$$\sup_{x \in E} g(x) = \sup_{y \in A} f(y), \quad \inf_{x \in E} g(x) = \inf_{y \in A} f(y).$$

定理 4.2.1　*设 G 是 $\mathbb{R} \times \mathscr{B}$ 中的开集, f 是 G 上的连续函数, 则对任意 $(\sigma, \varphi) \in G$, 存在 $b > 0$, 使得初值问题 (4.2.1) 存在解定义在 $[\sigma, \sigma + b]$ 上.*

证明 显然, 集合

$$U = \{(t,\psi) \in G \| f(t,\psi) - f(\sigma,\varphi)| < 1\}$$

是 $\mathbb{R} \times \mathscr{B}$ 中的开集且 $(\sigma,\varphi) \in U$.

存在点 (σ,φ) 的开邻域 $V \subset U$ 且其闭包 $\bar{V}$ 也在 U 中. 在 $\bar{V}$ 上有

$$|f(t,\psi)| < |f(\sigma,\varphi)| + 1.$$

由引理 4.2.5 知存在连续有界函数 $f_1 : \mathbb{R} \times \mathscr{B} \to \mathbb{R}^n$, 在 $\bar{V}$ 上恒等于 f. 于是由引理 4.2.4, 初值问题

$$x' = f_1(t, x_t), \quad x_\sigma = \varphi$$

存在定义在 $[\sigma,\infty)$ 上的解 $x(t)$.

因为 V 是开集, $(\sigma,\varphi) \in V$, 所以当 $\varepsilon > 0$ 充分小时有

$$\{(t,\psi) \in \mathbb{R} \times \mathscr{B} \| t - \sigma| + \rho(\psi,\varphi) < \varepsilon\} \subset V.$$

由 (B_2), 对充分小的 $b > 0$ 有

$$\rho(x_s, x_\sigma) = \rho(x_s, \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sigma \leqslant s \leqslant \sigma + b.$$

令 $0 < b < \varepsilon/2$, 有

$$|t - \sigma| + \rho(x_t, \varphi) < \varepsilon, \quad t \in [\sigma, \sigma + b].$$

也就是

$$(t, x_t) \in V, \quad t \in [\sigma, \sigma + b].$$

因为 f_1 在 V 上与 f 恒等, 故 $x(t)$ 是初值问题 (4.2.1) 的定义在 $[\sigma,\sigma+b]$ 上的解.∎

定义 4.2.1 *设 $f(t,\varphi)$ 定义在 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集 G 上, 如果对任意 $(t,\varphi_1),(t,\varphi_2) \in G$ 有*

$$|f(t,\varphi_1) - f(t,\varphi_2)| \leqslant L_G \rho(\varphi_1,\varphi_2),$$

则 f 称为是局部 Lipschitz 的.

定理 4.2.2 *如果 $f(t,\varphi)$ 在 $\mathbb{R} \times \mathscr{B}$ 中的开集 G 中是连续的, 局部 Lipschitz 的, 则初值问题 (4.2.1) 的解是唯一的.*

证明 设 $x^{(1)}(t)$ 和 $x^{(2)}(t)$ 是初值问题 (4.2.1) 的两个定义在 $[\sigma,\sigma+b]$ 上的满足 $x_\sigma^{(1)} = x_\sigma^{(2)} = \varphi$ 的解. 由 (B_2) 知集合 $Q_1 = \{x_s^{(1)} | \sigma \leqslant s \leqslant \sigma + b\}$ 和 $Q_2 = \{x_s^{(2)} | \sigma \leqslant s \leqslant \sigma+b\}$ 是 $\mathscr{B}$ 中的紧集, 因此集合 $Q_1 \cup Q_2$ 和 $Q = [\sigma,\sigma+b] \times (Q_1 \cup Q_2)$ 都是紧集.

由引理 4.2.1 有

$$\begin{aligned}\rho(x_s^{(1)},x_s^{(2)})&\leqslant K_1(s-\sigma,\alpha^*)\sup_{\sigma\leqslant\tau\leqslant s}|x^{(1)}(\tau)-x^{(2)}(\tau)|\\&\leqslant\max_{0\leqslant r\leqslant b}K_1(r,\alpha^*)\sup_{\sigma\leqslant\tau\leqslant\sigma+b}|x^{(1)}(\tau)-x^{(2)}(\tau)|,\end{aligned}$$

其中 $\alpha^*=\max\limits_{\sigma\leqslant t\leqslant\sigma+b}\{|x^{(1)}(t)|,|x^{(2)}(t)|\}$. 于是对 $t\in[\sigma,\sigma+b]$ 有

$$\begin{aligned}|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|&\leqslant\int_\sigma^t|f(s,x_s^{(1)})-f(s,x_s^{(2)})|\mathrm{d}s\\&\leqslant L_Q\int_\sigma^{\sigma+b}\rho(x_s^{(1)},x_s^{(2)})\mathrm{d}s\\&\leqslant L_Qb\max_{0\leqslant r\leqslant b}K_1(r,\alpha^*)\sup_{\sigma\leqslant\tau\leqslant\sigma+b}|x^{(1)}(\tau)-x^{(2)}(\tau)|.\end{aligned}$$

令 $b>0$ 充分小, 使得

$$\tilde{\alpha}=L_Qb\max_{0\leqslant r\leqslant b}K_1(r,\alpha^*)<1.$$

于是有

$$\sup_{\sigma\leqslant\tau\leqslant\sigma+b}|x^{(1)}(\tau)-x^{(2)}(\tau)|\leqslant\tilde{\alpha}\sup_{\sigma\leqslant\tau\leqslant\sigma+b}|x^{(1)}(\tau)-x^{(2)}(\tau)|.$$

由此得

$$|x^{(1)}(t)-x^{(2)}(t)|=0,\quad t\in[\sigma,\sigma+b],$$

即

$$x^{(1)}(t)=x^{(2)}(t),\quad t\in[\sigma,\sigma+b],$$

定理 4.2.1 得证. ∎

引理 4.2.6　令

$$F_A^L(\Gamma)=\bigcup_{\varphi\in\Gamma\subset B}\{x\in F_A(\varphi)|\ |x(t_1)-x(t_2)|\leqslant L|t_1-t_2|,\ t_1,t_2\in[0,A]\}.$$

若 $\Gamma\subset B$ 是紧集且 $A<\infty$, 则集合 $\Gamma_0=\{x_t|t\in[0,A],x\in F_A^L(\Gamma)\}$ 也是紧集.

证明　对任意序列

$$\{x_{t_k}^k\},\quad k=1,2,\cdots,t_k\in[0,A],\ x^k\in F_A^L(\Gamma),$$

不妨设 $t_k\to\sigma\in[0,A]$, $x_0^k\to\varphi\in\Gamma$, $k\to\infty$. 因 Γ 是紧集, 而 $x_0^k\in\Gamma$ 且 $x^k(t)$ 在 $[0,A]$ 上是 L-Lipschitz 的, 故可以证明 $x^k(t)$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛. 于是可以假设

$x^k(t)$ 在 $[0,A]$ 上一致收敛于某一连续函数 $x^0(t)$. 由 (A_4) 知 $x^k(t)\to\varphi(0)$. 因而 $x^0(0)=\varphi(0)$.

定义

$$x(t)=\begin{cases} x^0(t), & 0<t\leqslant A,\\ \varphi(t), & t\leqslant 0,\end{cases}$$

有 $x\in F_A^L(\Gamma)$. 由引理 4.2.1 有

$$\rho(x_t^k,x_t)\leqslant K_1(t,\alpha^*)\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|x^k(s)-x^0(s)|+M_1(t,x_0^k,\varphi),$$

其中,

$$\alpha^*=\max_{0\leqslant t\leqslant A}\{|x^k(t)|,\ k=0,1,2,\cdots\}.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N_1>0$, 使得只要 $k>N_1$ 就有

$$\rho(x_t^k,x_t)<\frac{\varepsilon}{2},\quad t\in[0,A].$$

另一方面, 因为 x_t 在 $[0,A]$ 上连续, 故存在 $\delta>0$ 使得只要 $|t-s|<\delta,\ t,s\in[0,A]$, 就有 $\rho(x_t,x_s)<\varepsilon/2$.

选取 $N_2>0$, 使得当 $k\geqslant N_2$ 时有 $|t_k-\sigma|<\delta$, 则当 $k\geqslant\max\{N_1,N_2\}$ 时有

$$\rho(x_{t_k}^k,x_\sigma)\leqslant\rho(x_{t_k}^k,x_{t_k})+\rho(x_{t_k},x_\sigma)<\varepsilon.$$

由此知当 $k\to\infty$ 时,$x_{t_k}^k\to x_\sigma\in\Gamma_0$. 引理 4.2.6 得证. ■

定理 4.2.3 *设 G,V 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, W 是 G 中的紧集且 $W\subset V\subset\bar V\subset G$, 其中, $\bar V$ 是 V 的闭包. 设 f 在 G 中连续, $(\sigma,\varphi)\in W$ 且 $x(t)$ 是初值问题 (4.2.1) 的一个饱和解, 则存在 $t>\sigma$, 使得 $(t,x_t)\in G-W$.*

证明 易见存在 $M>0$, 满足 $|f(t,\psi)|\leqslant M$, $(t,\psi)\in\bar V\subset G$, 由引理 4.2.5 知存在有界函数 f_1, 它在 $\bar V$ 上与 f 恒等.

由引理 4.2.4 知, 初值问题

$$x'=f_1(t,x_t),\quad x_\sigma=\varphi$$

的解 $x^{(1)}(t)$ 当 $t\geqslant\sigma$ 时存在.

如果对任意 $t\geqslant\sigma$, $(t,x_t^{(1)})\in W$, 则有

$$\{(\sigma+n,x_{\sigma+n}^{(1)})|n=1,2,\cdots\}\subset W.$$

但这个序列显然无收敛子列, 这与 W 的紧性矛盾. 因此, 存在 $t_1>\sigma$, 使得 $(t_1,x_{t_1}^{(1)})\notin W$. 因 $x^{(1)}(t)$ 关于 t 连续, 故存在 $t_2>\sigma$, 使得

$$(t_2,x_{t_2}^{(1)})\in V-W\subset G-W.$$

因 f_1 与 f 在 V 上恒等, 定理得证. ∎

引理 4.2.7 设 $f(t,\psi)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 上连续, 有界且满足局部 Lipschitz 条件,G 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, $(\sigma,\varphi)\in G$. $x(\sigma,\varphi)(t)$ 是 (4.2.1) 的定义在 $[\sigma,\sigma+A]$ 上的解, 则当 $\rho(\varphi_k,\varphi)\to 0$, $k\to\infty$ 时, $\rho(x_t(\sigma,\varphi_k),x_t(\sigma,\varphi))$ 一致收敛于零.

证明 记

$$x^k(t)=x(\sigma,\varphi_k)(t),\quad x^0(t)=x(\sigma,\varphi)(t),$$

则由引理 4.2.4 和引理 4.2.6 知集合

$$Q=[\sigma,\sigma+b]\times\{x_t^k|k=0,1,2,\cdots,\ t\in[\sigma,\sigma+A]\}$$

是紧集, 故 $f(t,\varphi)$ 在 Q 上有界. 可设

$$|f(t,\psi)|\leqslant H,\quad (t,\psi)\in Q.$$

又因 $\rho(\varphi_k,\varphi)\to 0$, $k\to\infty$, 由 (A_4) 有

$$\varphi_k(0)\to\varphi(0),\quad k\to\infty.$$

因此可以设

$$|\varphi_k(0)|\leqslant|\varphi(0)|+H_1.$$

由此得

$$|x^k(t)|\leqslant|\varphi(0)|+H_1+AH,\quad t\in[\sigma,\sigma+A].$$

记 $\alpha^*=|\varphi(0)|+H_1+AH$. 由引理 4.2.1 有

$$\begin{aligned}\rho(x_t^k,x_t^0)&\leqslant K_1(t-\sigma,\alpha^*)\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}|x^k(s)-x^0(s)|+M_1(t-\sigma,\varphi_k,\varphi)\\&\leqslant\bar{K}_1\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant t}\left[|\varphi_k(0)-\varphi(0)|+\int_\sigma^s|f(\tau,x_\tau^k)-f(\tau,x_\tau^0)|\mathrm{d}\tau\right]+M_1(t-\sigma,\varphi_k,\varphi),\end{aligned}$$

其中,

$$\bar{K}_1=\max_{\sigma\leqslant t\leqslant\sigma+A}K_1(t-\sigma,\alpha^*).$$

记

$$\alpha_k(t)=\bar{K}_1|\varphi_k(0)-\varphi(0)|+M_1(t-\sigma,\varphi_k,\varphi),$$

由推广的 Gronwall 不等式有

$$\begin{aligned}\rho(x_t^k,x_t^0)&\leqslant\alpha_k(t)+\int_\sigma^t\bar{K}_1L_Q\alpha_k(s)\mathrm{e}^{L_Q\bar{K}_1(t-s)}\mathrm{d}s\\&\leqslant\alpha_k(t)+\int_\sigma^{\sigma+A}\bar{K}_1L_Q\alpha_k(s)\mathrm{e}^{L_Q\bar{K}_1A}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因为 $M_1(t,\cdot,\cdot)$ 在紧致集合 $[\sigma,\sigma+A]\times\{\varphi_k\}\times\{\varphi\}$ 上是有界的，由 (A_4) 和控制收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x_t^k,x_t^0)=0.$$

再由 (A_4) 和 (B_1) 知当 $k\to\infty$ 时,$\alpha_k(t)$ 在 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 上一致收敛于零. 由此推得, 当 $k\to\infty$ 时, $\rho(x_t^k,x_t^0)$ 在 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 上一致收敛于零. 证毕. ■

引理 4.2.8 设 G 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, $(\sigma,\varphi)\in G$, $x(\sigma,\varphi)(t)$ 是 (4.2.1) 的定义在 $[\sigma,\sigma+A]$ 上的唯一解, 若 $(\sigma,\varphi_k)\in G$, $\rho(\varphi_k,\varphi)\to 0$, $k\to\infty$, 则对充分大的 k, $x(\sigma,\varphi_k)$ 在 $[\sigma,\sigma+A]$ 上存在且对 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 有

$$\rho(x_t(\sigma,\varphi_k),x_t(\sigma,\varphi))\to 0,\quad k\to\infty.$$

证明 因为集合

$$W=\{(t,x_t(\sigma,\varphi))|t\in[\sigma,\sigma+A]\}$$

是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 上的紧集, 故 f 在 W 上有界. 对充分小的 $\varepsilon_1>0$, 集合

$$V=\{(s,\psi)||s-t|\leqslant\varepsilon_1,\ \rho(\psi,x_t(\sigma,\varphi))\leqslant\varepsilon_1,\ (t,x_t)\in W\}\subset G$$

且 f 在 V 上有界. 因为 V 是闭集, 由引理 4.2.5 知存在定义在 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 上的连续有界的 f_1, 并且在 V 上与 f 恒等.

令 $y^k=y(\sigma,\varphi_k)$ 是初值问题

$$y'=f_1(t,y_t),\quad y_\sigma=\varphi_k$$

的解, 其中, $\varphi_0=\varphi$, 故 $y(\sigma,\varphi_0)=x(\sigma,\varphi)$. 由引理 4.2.7 有

$$\rho(y_t^k,y_t^0)=\rho(y_t^k,x_t^0)\to 0,\quad k\to\infty$$

对 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 一致地成立. 设 $x^k=x(\sigma,\varphi_k)$, $x^0=x(\sigma,\varphi)$. 因此对充分大的 k 有

$$\rho(y_t^k,x_t^0)<\varepsilon_1,\quad t\in[\sigma,\sigma+A]$$

且对 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 有 $(t,y_t^k)\in V$.

因为 f_1 与 f 在 V 上恒等, 故对充分大的 k , $y^k(t)=x^k(t)$, $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_t^k,x_t^0)=0$. 对 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 一致成立. 定理证毕. ■

定理 4.2.4 设 G 是 $\mathbb{R}\times\mathscr{B}$ 中的开集, f 在 G 中连续且满足局部 Lipschitz 条件, $(\sigma,\varphi)\in G$. 设 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 是 (4.2.1) 的定义在 $[\sigma,\sigma+A]$ 的唯一解, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon,\varphi)>0$, 使得对 $\psi\in\mathscr{B}$, 只要 $|s-\sigma|<\delta$, $\rho(\varphi,\psi)<\delta$ 就有

$$\rho(x_t(\sigma,\varphi),x_t(s,\psi))<\varepsilon,\quad t\in[\max\{s,\sigma\},\sigma+A].$$

证明　设 W, V 和 f_1 的定义与引理 4.2.8 相同.

如果 $s \leqslant \sigma$, 由引理 4.2.8, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得对 $t \in [\sigma, \sigma + A]$, 只要 $\rho(\varphi_1, \varphi) < \delta_1$ 就有 $(t, y_t(\sigma, \varphi_1)) \in V$, 这里 $y(\sigma, \varphi_1)$ 是初值问题

$$y' = f_1(t, y_t), \quad y_\sigma = \varphi_1$$

的解. 于是有

$$y_t(\sigma, \varphi_1) = x_t(\sigma, \varphi_1), \quad t \in [\sigma, \sigma + A]$$

和

$$\rho(x_t(\sigma, \varphi_1), x_t(\sigma, \varphi)) \leqslant \varepsilon, \quad t \in [\sigma, \sigma + A]. \tag{4.2.2}$$

还有

$$\begin{aligned}\rho(x_\sigma(s, \psi), \varphi) &= \rho(x_\sigma(s, \psi), x_\sigma(\sigma, \varphi)) \\ &\leqslant \rho(x_\sigma(s, \psi), x_s(s, \psi)) + \rho(x_s(s, \psi), x_\sigma(\sigma, \varphi)) \\ &= \rho(x_\sigma(s, \psi), x_s(s, \psi)) + \rho(\psi, \varphi).\end{aligned}$$

由 (B_2), 存在 $\delta_2 > 0$, 使得只要 $|\sigma - s| < \delta_2$ 就有

$$\rho(x_\sigma(s, \psi), x_s(s, \psi)) < \frac{\delta_1}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta_2, \delta_1/2\}$, 则只要 $|\sigma - s| < \delta$, $\rho(\psi, \varphi) < \delta$ 就有 $\rho(x_\sigma(s, \psi), \varphi) < \delta_1$. 由 (4.2.2) 有

$$\rho(x_t(\sigma, x_\sigma(s, \psi)), x_t(\sigma, \varphi)) = \rho(x_t(s, \psi), x_t(\sigma, \varphi)) \leqslant \varepsilon, \quad t \in [\sigma, \sigma + A].$$

如果 $s > \sigma$, 则存在 $\delta_1 > 0$, 使得只要 $\rho(\psi, x_s(\sigma, \varphi)) < \delta_1$ 就有

$$(t, y_t(s, x_s(\sigma, \varphi))) \in V, \quad t \in [s, \sigma + A].$$

因此

$$y_t(s, x_s(\sigma, \varphi)) = x_t(s, x_s(\sigma, \varphi)), \quad t \in [s, \sigma + A]$$

和

$$\rho(x_t(s, \psi), x_t(s, x_s(\sigma, \varphi))) < \varepsilon, \quad t \in [s, \sigma + A].$$

另一方面, 有

$$\rho(\psi, x_s(\sigma, \varphi)) \leqslant \rho(\psi, \varphi) + \rho(\varphi, x_s(\sigma, \varphi)) = \rho(\psi, \varphi) + \rho(x_\sigma(\sigma, \varphi), x_s(\sigma, \varphi)),$$

存在 $\delta_2 > 0$, 使得只要 $|\sigma - s| < \delta_2$ 就有

$$\rho(x_\sigma(\sigma, \varphi), x_s(\sigma, \varphi)) < \frac{\delta_1}{2}.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1/2,\delta_2\}$, 则只要 $\rho(\psi,\varphi)<\delta$, 就有

$$\rho(\psi,x_s(\sigma,\varphi))<\delta_1.$$

由此有

$$\rho(x_t(s,\psi),x_t(\sigma,\varphi))=\rho(x_t(s,\psi),x_t(s,x_s(\sigma,\varphi)))<\varepsilon,\quad t\in[s,\sigma+A].$$

定理证毕. ∎

4.3 ρ^* 一致有界性

本节在空间 C_ρ^* 中讨论方程 (4.2.1) 的解的有界性. 为方便起见, 设 $\mu(s)=s$, $s\in\mathbb{R}^-$, 设

$$\xi(a)=\sup_{|x|\leqslant a}|p(x)|,\quad \xi_1(a)=\inf_{|x|\geqslant a}|p(x)|$$

是严格增加函数.

设 G 是 $\mathbb{R}\times C_\rho^*$ 中的开集, $f(t,\varphi)$ 在 G 中连续且是局部 Lipschitz 的.

定义 4.3.1 如果对任意 $\sigma\in\mathbb{R}$ 和任意 $H>0$, 存在 $N(H)>0$, 使得只要 $\rho^*(\varphi,0)\leqslant H$ 和 $t\geqslant\sigma$ 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant N(H)$, 则方程 (4.2.1) 的解称为是 ρ^* 一致有界的.

定义 4.3.2 如果存在 $b>0$, 使得对任意 $H>0$, 存在 $T(H)>0$, 只要 $\rho^*(\varphi,0)\leqslant H$ 和 $t\geqslant\sigma+T(H)$, 就有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant b$, 则方程 (4.2.1) 的解称为是 ρ^* 一致最终有界的.

定理 4.3.1 设存在泛函 $V(t,\varphi)$、楔函数 $W_i(r)$ $(i=1,2,3,4)$ 和 $W(r)$ 及常数 $U>0$, 使得对方程 (4.2.1) 的任意解 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$ 有

(1) $W_1(|x(t)|)\leqslant V(t,x_t)\leqslant W_2(|x(t)|)+W_3(\rho^*(x_t,0))$, $t\geqslant\sigma$;

(2) $V'_{(4.2.1)}(t,x_t)\leqslant -W_4(|x(t)|)-|W'_{(4.2.1)}(|x(t)|)|$, $|x(t)|\geqslant U$, $t\geqslant\sigma$;

(3) $\lim\limits_{r\to\infty}[2W(r)-W_3(H+lk\xi(r))]=\infty, H>0$,

其中, k 与 (4.1.1) 中相同, 则方程 (4.2.1) 的解是 ρ^* 一致有界的.

证明与定理 2.2.1 完全类似.

证明 对给定的 $H>0$ 和满足 $\rho^*(\varphi,0)\leqslant H$ 的 φ 有

$$\begin{aligned}H\geqslant\rho^*(\varphi,0)&=\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|P(\varphi)|^{[s,0]})\mathrm{d}s\\&\geqslant\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|p(\varphi(0))|)\mathrm{d}s=lF(|p(\varphi(0))|),\end{aligned}$$

于是

$$\xi_1(|\varphi(0)|) \leqslant |p(\varphi(0))| \leqslant F^{-1}\left(\frac{H}{l}\right),$$

从而 $|\varphi(0)| \leqslant \xi_1^{-1}(F^{-1}(H/l))$. 令 $U \geqslant \xi_1^{-1}(F^{-1}(H/l))$, 可选取 $M > U$, 使得只要 $r \geqslant M$ 就有

$$2W(r) > W_3(H + lk\xi(r)) + W_2(U) + 2W(U).$$

考虑方程 (4.2.1) 的满足 $\rho^*(\varphi, 0) \leqslant H$ 的解 $x(t) = x(\sigma, \varphi)(t)$, $t \geqslant \sigma$, 则或者

(A) 对 $t \geqslant \sigma$, 有 $|x(\sigma, \varphi)(t)| \leqslant M$,

或者

(B) 存在第一个 $t_1 > \sigma$, 使得 $|x(t_1)| = M$.

如果 (B) 成立, 则由 (2) 知 $|x(t)| > U$, 不能对所有的 $t \geqslant \sigma$ 都成立, 故必存在第一个 $t_2 > t_1$, 使得 $|x(t_2)| = U$. 令

$$|x(\bar{t})| = \max_{t_1 \leqslant s \leqslant t_2} |x(t)|,$$

必有 $|x(\bar{t})| \geqslant M$. 要证明对所有的 $t \geqslant \sigma$ 有 $|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})|$.

如若不然, 则存在第一个区间 $[t_3, t_4]$, $t_3 \geqslant t_2$, 使得

$$|x(t_3)| = U, \quad |x(t_4)| > |x(\bar{t})|, \quad |x(t)| \geqslant U, \quad t \in [t_3, t_4].$$

假如还存在第一个 $t_5 > t_4$, 使得 $|x(t_5)| = U$, 则有

$$\begin{aligned} V(t_5, x_{t_5}) &\leqslant V(t_3, x_{t_3}) - \int_{t_3}^{t_4} |W'_{(4.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s - \int_{t_4}^{t_5} |W'_{(4.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant W_2|x(t_3)| + W_3(\rho^*(x_{t_3}, 0)) - 2W(|x(\bar{t})|) + 2W(U) \\ &\leqslant W_2(U) + W_3\left(\int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\varphi)|^{[s,0]} + \sup_{\sigma \leqslant t \leqslant t_3} |p(x(t))|)\mathrm{d}s\right) \\ &\quad -2W(|x(\bar{t})|) + 2W(U) \\ &\leqslant W_2(U) + W_3(H + lk\xi(|x(\bar{t})|)) - 2W(|x(\bar{t})|) + 2W(U) < 0. \end{aligned}$$

这个矛盾证明了对 $t \geqslant \sigma$ 有 $|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})|$. 积分 (2) 可以得到

$$\begin{aligned} 0 \leqslant V(\bar{t}, x_{\bar{t}}) &\leqslant V(t_1, x_{t_1}) - \int_{t_1}^{\bar{t}} |W'_{(4.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant V(t_1, x_{t_1}) - W(|x(\bar{t})|) + W(|x(t_1)|) \end{aligned}$$

和

$$0 \leqslant W_2(|x(t_1)|) + W_3(\rho^*(x_{t_1}, 0)) - W(|x(\bar{t})|) + W(|x(t_1)|),$$

也就是

$$W(|x(\bar{t})|) \leqslant W_2(|x(t_1)|) + W_3\left(\int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(x_{t_1})|^{[s,0]})\mathrm{d}s + W(|x(t_1)|)\right)$$
$$\leqslant W_2(M) + W(M) + W_3(H + lk\xi(M)).$$

最后, 有

$$|x(t)| \leqslant |x(\bar{t})| \leqslant W^{-1}(W_2(M) + W(M) + W_3(H + lk\xi(M))) := N(H), \quad t \geqslant \sigma.$$

因而, 方程 (4.2.1) 的解是 ρ^* 一致有界的. ■

定义 4.3.3 设对任意连续函数 $x(t)$ 和 $t \geqslant t_0$, 泛函 $V(t,\varphi)$ 满足

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant W_2(|x(t)|) + W_3(\rho^*(x_t, 0)).$$

$V(t,\varphi)$ 称为是 ρ^* 一致健忘的, 如果对任意 $\sigma > 0$, $R > 0$, 存在 $S = S(\sigma, R) > 0$, 使得只要 $t_0 > -\infty$, $t \geqslant t_0 + S$, $\rho^*(x_{t_0}, 0) \leqslant R$ 就有

$$W_1(|x(t)|) \leqslant V(t, x_t) \leqslant \sigma + W_2(|x(t)|) + W_3(lk\xi(|x|^{[t_0,t]})).$$

例 4.3.1 设 $h(s) = \mathrm{e}^s$, $\mu(s) = s$, 则 $l = \int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s = 1$. 令

$$V(t, x_t) = |x(t)| + \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(u-s)}F(|p(x(s))|)\mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

容易证明

$$|x(t)| \leqslant V(t, x_t) \leqslant |x(t)| + \rho^*(x_t, 0).$$

对任意 $\sigma > 0$, $R > 0$, 选取 $S > 0$, 使得 $\mathrm{e}^{-s} \leqslant \sigma/R$, 则对 $t \geqslant t_0 + S$, $\rho^*(x_{t_0}, 0) \leqslant R$ 有

$$V(t, x_t) \leqslant \sigma + |x(t)| + lk\xi(|x|^{[t_0,t]}).$$

故 $V(t, x_t)$ 是 ρ^* 一致健忘的.

例 4.3.2 令 $h(s) = (1-s)^{-2}$, $\mu(s) = s$, $F(\tau) = \tau$, $p(x) = x$, 则 $l = 1$. 可以证明如下泛函:

$$V(t, x_t) = |x(t)| + \int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty} \frac{|x(s)|}{[1+(u-s)]^4}\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

是 ρ^* 一致健忘的.

定理 4.3.2　设存在 ρ^* 一致健忘的泛函 $V(t,\varphi)$ 满足定理 4.3.1 的条件, 则方程 (4.2.1) 的解是 ρ^* 一致最终有界的.

证明与定理 2.2.2 完全类似.

证明　选取 $M>U$, 使得当 $r>M$ 时有

$$2W(r)>W_3(lk\xi(r))+3W_2(U)+2W(U).$$

由定理 4.3.1 知方程 (4.2.1) 的解是 ρ^* 一致有界的. 故对任意 $H>0$, 存在 $D(H)>0$, 使得只要 $\rho^*(\varphi,0)\leqslant H$, $t\geqslant t_0$ 就有 $|x(t_0,\varphi)(t)|\leqslant D$. 不妨假设 $D>M$. 因为 $W(r)$ 在 $[M,D]$ 上是一致连续的, 故存在正数 $m=m(H)<M-U$, 使得当 $r\in[M,D]$ 时有

$$W(r)-W(r-m)\leqslant\frac{W_2(U)}{2}.$$

于是对 $r\in[M,D]$ 有

$$2W(r-m)-W_3(lk\xi(r))>2W(U)+2W_2(U).$$

由 (2) 注意到, 存在 $L>0$, 使得 $|x(t)|>U$ 不能在长于 L 的区间上成立. 另一方面, 因为 $V(t,x_t)$ 是一致健忘的, 故对 $\sigma=W_2(U)$, $R=H+lD>0$, 存在 $S=S(H)>0$, 使得只要 $t\geqslant t_0+S$, $\rho^*(x_{t_0},0)\leqslant R$ 就有

$$0\leqslant V(t,x_t)\leqslant W_2(U)+W_2(|x(t)|)+W_3(lk\xi(|x|^{[t_0,t]})).$$

记

$$I_i=[t_0+(i-1)(L+S),t_0+i(L+S)],\quad i=1,2,\cdots.$$

在任意 I_i 上, 或者

(A) $|x(t)|\leqslant M$,

或者

(B) 存在 $t^*\in I_i$, 使得 $|x(t^*)|>M$.

如果 (A) 成立, 或者

(AI) 对所有 $t>t_0+i(L+S)$, 有 $|x(t)|<M$,

或者

(AII) 存在第一个 $t_1>t_0+i(L+S)$, 使得 $|x(t_1)|=M$.

如果 (AII) 成立, 由 (2) 知存在第一个 $t_2>t_1$, 使得 $|x(t_2)|=U$. 令

$$|x(\tilde{t})|=\max_{t_0+(i-1)(L+S)\leqslant t\leqslant t_2}|x(t)|,$$

显然有 $|x(\tilde{t})| \geqslant M$. 要证明当 $t > t_2$ 时,$|x(t)| \leqslant |x(\tilde{t})|$. 如若不然, 则必然存在某个 $t > t_2$, 使得 $|x(t)| > |x(\tilde{t})|$. 由此, 在 t_2 的右端, 存在第一个区间 $[t_3, t_5]$ 和 $t_4 \in [t_3, t_5]$, 使得

$$|x(t_3)| = U = |x(t_5)|, \quad |x(t_4)| = |x(\tilde{t})|$$

和

$$|x(t)| \geqslant U, \quad t \in [t_3, t_5],$$

于是有

$$\begin{aligned}V(t_5, x_{t_5}) &\leqslant V(t_3, x_{t_3}) - 2W(|x(t_4)|) + 2W(U)\\&\leqslant W_2(U) + W_2(|x(t_3)|) + W_3(lk\xi(|x|^{[t_0+(i-1)(L+S),t_3]}))\\&\quad -2W(|x(t_4)|) + 2W(U)\\&= 2W_2(U) + W_3(lk\xi(|x(\tilde{t})|)) - 2W(|x(\tilde{t})|) + 2W(U) < 0.\end{aligned}$$

这个矛盾证明了当 $t > t_3$ 时有 $|x(t)| \leqslant |x(\tilde{t})|$, 因此, 对 $t \geqslant t_0 + (i-1)(L+S)$, 由 (2) 有

$$\begin{aligned}0 \leqslant V(\tilde{t}, x_{\tilde{t}}) &\leqslant V(t_1, x_{t_1}) - \int_{t_1}^{\tilde{t}} |W'_{(4.2.1)}(|x(s)|)| \mathrm{d}s\\&\leqslant W_2(U) + W_2(M) + W_3(lk\xi(M)) - W(|x(\tilde{t})|) + W(M).\end{aligned}$$

于是有

$$W(|x(\tilde{t})|) \leqslant W_2(U) + W_2(M) + W_3(lk\xi(M)) + W(M)$$

和

$$\begin{aligned}|x(t)| \leqslant |x(\tilde{t})| \leqslant W^{-1}(W_2(U) + W_2(M) + W_3(lk\xi(M)) + W(M)) := b,\\ t \geqslant t_0 + (i-1)(L+S),\end{aligned}$$

即如果 (A) 成立, 则当 $t \geqslant t_0 + (i-1)(L+S)$ 时,$|x(t)| \leqslant b$.

如果 (B) 成立, 则存在 $t^* \in I_i$, 使得 $|x(t^*)| > M$. 由 (2) 知存在 $t_6 \in I_{i+1}$, 使得 $|x(t_6)| < U$. 令

$$\tilde{M}_i = \max_{t_0+(i-1)(L+S) \leqslant t \leqslant t_6} |x(t)|.$$

要证明当 $t \geqslant t_6$ 时, $|x(t)| \leqslant \tilde{M}_i - m$.

如若不然, 存在第一个 $t_7 > t_6$, 使得 $|x(t_7)| \geqslant \tilde{M}_i - m$ 和 $t_8 < t_9 < t_{10}$, 使得当 $t \in [t_6, t_8]$ 有 $|x(t)| \leqslant \tilde{M}_i$ 以及

$$|x(t_8)| = U = |x(t_{10})|, \quad |x(t_9)| = \tilde{M}_i - m$$

和

$$|x(t)| \geqslant U, \quad t \in [t_8, t_{10}],$$

有

$$\begin{aligned} V(t_{10}, x_{t_{10}}) &\leqslant V(t_8, x_{t_8}) - \int_{t_8}^{t_9} |W'_{(4.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s - \int_{t_9}^{t_{10}} |W'_{(4.2.1)}(|x(s)|)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant 2W_2(U) + W_3(lk\xi(\tilde{M}_i)) - 2W(\tilde{M}_i - m) + 2W(U) < 0. \end{aligned}$$

这个矛盾证明了当 $t \geqslant t_6$ 时有 $|x(t)| \leqslant \tilde{M}_i - m$ 以及

$$|x(t)| \leqslant \tilde{M}_i - m, \quad t \geqslant t_0 + (i+1)(L+S).$$

因为 $\tilde{M}_i \leqslant D(H)$, 情况 (B) 至多在有限个 I_i 上成立, 因而情况 (A) 必然会出现. 令 n 是正整数, 满足 $nm > D(H)$, 设 $T = 2n(S+T)$. 于是当 $t \geqslant t_0 + T$, $\rho^*(\varphi, 0) \leqslant H$, 时有 $|x(t_0, \varphi)(t)| \leqslant b$. 定理证毕. ∎

下面要应用定理 4.3.1 和定理 4.3.2 来研究非线性纯量 Volterra 积分微分方程

$$x' = A(t)p(x(t)) + \int_{-\infty}^{t} D(t, s, x(s))\mathrm{d}s + e(t). \tag{4.3.1}$$

为简单起见, 只研究纯量方程. 假设 $A(t)$, $e(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, $p(x)$ 满足例 4.1.1 的条件 (4),$D(t, s, x)$ 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上连续且 $D(t, s, 0) \equiv 0$. 还设存在 $\mathbb{R}^-$ 上的非负连续函数 $h(s)$ 和 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的连续函数 $E(u, r)$, 满足 $\int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s < \infty$ 和

$$|D(u, u'+r, x_1) - D(u, u'+r, x_2)| \leqslant E(u, u')h(r)|p(x_1) - p(x_2)|, \quad u, u', r, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

引理 4.3.1　*设 $\mu(s) = s$, 则*

$$f(t, \varphi) = A(t)p(\varphi(0)) + \int_{-\infty}^{0} D(t, t+s, \varphi(s))\mathrm{d}s + e(t)$$

在 $\mathbb{R} \times C_{\rho^*}$ 上连续且是局部 Lipschitz 的.

证明　对固定的 $(t_1, \varphi_1) \in \mathbb{R} \times C_{\rho^*}$ 和任意 $(t, \varphi) \in \mathbb{R} \times C_{\rho^*}$ 有

$$\begin{aligned}|f(t_1,\varphi_1)-f(t,\varphi)|\leqslant&|A(t_1)p(\varphi_1(0))-A(t)p(\varphi(0))|\\&+\int_{-\infty}^{0}|D(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))-D(t,t+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s\\\leqslant&|A(t_1)p(\varphi_1(0))-A(t)p(\varphi(0))|\\&+\int_{-\infty}^{0}|D(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))-D(t,t+s,\varphi_1(s))|\mathrm{d}s\\&+\int_{-\infty}^{0}|D(t,t+s,\varphi_1(s))-D(t,t+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由 (A_4) 得

$$|A(t_1)p(\varphi_1(0))-A(t)p(\varphi(0))|\to 0,\quad |t_1-t|+\rho^*(\varphi_1,\varphi)\to 0.$$

因为

$$\begin{aligned}&|D(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))-D(t,t+s,\varphi_1(s))|\\\leqslant&|D(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))|+|D(t,t+s,\varphi_1(s))|\\\leqslant&(E(t_1,t_1)+E(t,t))h(s)|p(\varphi_1(s))|,\end{aligned}$$

故当 $|t-t_1|$ 充分小时有 $E(t,t)\leqslant 2E(t_1,t_1)$ 和

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{0}|D(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))-D(t,t+s,\varphi_1(s))|\mathrm{d}s\\\leqslant&\int_{-\infty}^{0}(E(t_1,t_1)+E(t,t))h(s)|p(\varphi_1(s))|\mathrm{d}s\\\leqslant&3E(t_1,t_1)\int_{-\infty}^{0}h(s)|p(\varphi_1)|^{[s,0]}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

由控制收敛定理有

$$\lim_{t\to t_1}\int_{-\infty}^{0}|D(t_1,t_1+s,\varphi_1(s))-D(t,t+s,\varphi_1(s))|\mathrm{d}s=0.$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{0}|D(t,t+s,\varphi_1(s))-D(t,t+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s\\\leqslant&E(t,t)\int_{-\infty}^{0}h(s)|p(\varphi_1)-p(\varphi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s=E(t,t)\rho^*(\varphi,\varphi_1).\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

综上所述, 可以得到

$$|f(t_1,\varphi_1)-f(t,\varphi)|\to 0,\quad |t_1-t|+\rho^*(\varphi,\varphi_1)\to 0,$$

所以 $f(t,\varphi)$ 是连续的. 令 $t=t_1$, 并应用 (4.3.2) 即可证明 $f(t,\varphi)$ 是局部 Lipschitz 的. 证毕. ∎

引理 4.3.2　设引理 4.3.1 的所有条件都成立且有

$$\int_t^{+\infty} E(u,t)\mathrm{d}u\leqslant a<\infty,\quad \lim_{t\to\infty}\int_t^{+\infty} E(u,t)\mathrm{d}u=0,$$

则泛函

$$V(t,x_t)=|x(t)|+k\int_{-\infty}^{t}\int_t^{+\infty}|D(u,s,x(s))|\mathrm{d}u\mathrm{d}s,\quad k>0$$

是 ρ^* 一致楗忘的.

证明　首先, 易见

$$|x(t)|\leqslant V(t,x_t)\leqslant |x(t)|+ka\rho^*(x_t,0).$$

对任意给定的 $\sigma>0$, $R>0$, 选取 $S>0$, 使得只要 $t-t_0\geqslant S$ 就有

$$k\int_t^{+\infty}E(u,t_0)\mathrm{d}u\leqslant\frac{\sigma}{R},$$

则由 $t\geqslant t_0+S$ 和 $\rho^*(x_{t_0},0)\leqslant R$ 可以推出

$$\begin{aligned}V(t,x_t)&\leqslant |x(t)|+k\int_t^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{t_0}|D(u,s,x(s))|\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}|D(u,s,x(s))|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u\\&\leqslant |x(t)|+kal\xi(|x|^{[t_0,t]})+\sigma,\end{aligned}$$

因而 $V(t,x_t)$ 是 ρ^* 一致楗忘的. ∎

定理 4.3.3　设引理 4.3.1 和引理 4.3.2 的条件成立且有

(1) 存在 $k:1<k<2$ 和 $\delta>0$, 使得

$$(2-k)A(t)+kh(0)\int_t^{+\infty}|E(u,t)|\mathrm{d}u<-\delta,$$

(2) $al<2(k-1)/k$,

(3) $|e(t)|\leqslant 1$,

则方程 (4.3.1) 的解是 ρ^* 一致有界和 ρ^* 一致最终有界的.

证明 令

$$V(t,x_t)=|x(t)|+k\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{+\infty}|D(u,s,x(s))|\mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

由引理 4.3.2 知 $V(t,x_t)$ 满足定理 4.3.1 的条件 (1) 且是 ρ^* 一致健忘的, 只需证明定理 4.3.1 的条件 (2) 和 (3) 即可. 有

$$\begin{aligned}V'_{(4.3.1)}(t,x_t)\leqslant{}& A(t)|p(x(t))|+\int_{-\infty}^{t}|D(t,s,x(s))|\mathrm{d}s+|e(t)|\\&+k\int_{t}^{+\infty}|D(u,t,x(t))|\mathrm{d}u-k\int_{-\infty}^{t}|D(t,s,x(s))|\mathrm{d}s\\\leqslant{}&\left(A(t)+kh(0)\int_{t}^{+\infty}|E(u,t)|\mathrm{d}u\right)|p(x(t))|\\&+(1-k)(|x'|-|A(t)||p(x(t))|-|e(t)|)+|e(t)|\\\leqslant{}&\left((2-k)A(t)+kh(0)\int_{t}^{+\infty}E(u,t)\mathrm{d}u\right)|p(x(t))|+(1-k)|x'|+k|e(t)|\\\leqslant{}&-\delta|p(x(t))|+(1-k)||x|'|+k|e(t)|.\end{aligned}$$

令 $W_1(r)=W_2(r)=r$, $W_3(r)=kar$, $W(r)=(k-1)r$. 定理 4.3.1 和定理 4.3.2 的所有条件都成立, 因此方程 (4.3.1) 的解是 ρ^* 一致有界和 ρ^* 一致最终有界的. 定理证毕. ∎

4.4 周期解的存在性

设 $f(t,\varphi)$ 在 $\mathbb{R}\times C_{\rho^*}$ 中连续且满足局部 Lipschitz 条件.

引理 4.4.1 对任意常数 $a>0,b\geqslant 0$, 集合

$$S=\{\varphi\in C_{\rho^*}||\varphi|^{\mathbb{R}^-}\leqslant a,\ |\varphi(\theta_1)-\varphi(\theta_2)|\leqslant b|\theta_1-\theta_2|,\ \theta_1,\ \theta_2\in\mathbb{R}^-\}$$

是凸的、ρ^* 紧的.

证明 对任意序列 $\varphi_n\in S$, $\{\varphi_n\}$ 在 $[-1,0]$ 上是等度连续、一致有界的. 由 Arzela-Ascoli 引理知存在子序列 $\{\varphi_n^{(1)}\}$ 在 $[-1,0]$ 上一致收敛于某一连续函数 $\varphi_0^{(1)}$. 同理,$\{\varphi_n^{(1)}\}$ 有子序列 $\{\varphi_n^{(2)}\}$ 在 $[-2,0]$ 上一致收敛于某一连续函数 $\varphi_0^{(2)}$. 依此类推, 可以得到 $\{\varphi_n\}$ 的子序列 $\{\varphi_n^{(n)}\}$, 在任意区间 $[-i,0]$ $(i=1,2,\cdots)$ 上一致收敛

于连续函数 φ_0 且 $\varphi_0 \equiv \varphi_0^{(i)}$, $t \in [-i, 0]$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{-M} h(s)F(\xi(a))\mathrm{d}\mu(s) < \frac{\varepsilon}{4},$$

又存在 $N > 0$, 使得

$$F(L|\varphi_n^{(n)} - \varphi_0|^{[-M,0]}) < \frac{\varepsilon}{2l}, \quad n > N,$$

其中, L 是 $p(x)$ 的 Lipschitz 常数, 则有

$$\begin{aligned}
\rho^*(\varphi_n^{(n)}, \varphi_0) &= \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\varphi_n^{(n)}) - P(\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\leqslant \int_{-M}^{0} h(s)F(L|\varphi_n^{(n)} - \varphi_0|^{[-M,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\quad +2\int_{-\infty}^{-M} h(s)F(\xi(a))\mathrm{d}\mu(s) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon}{4} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

也就是 $\rho^*(\varphi_n, \varphi_0) \to 0$, $n \to \infty$. 易见 $\varphi_0 \in S$, 故 S 是 ρ^* 紧致的. ■

引理 4.4.2　设 $p(x)$ 满足例 4.1.1 的条件 (4). 假设存在正整数 k_1, k_2, 使得

$$|p(x+y)| \leqslant k_1(|p(x)| + |p(y)|), \quad |p(x-y)| \leqslant k_2|p(x) - p(y)|,$$

存在非负连续函数 $\beta_1(\tau), \beta_2(\tau)$ 满足 $\beta_2(0) = 0$, 使得对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有

$$|p(k_3x) - p(k_3y)| \leqslant \beta_1(k_3)|p(x) - p(y)|,$$

$$|p(\alpha x) - p(\beta x)| \leqslant \beta_2(\alpha - \beta)|p(x)|,$$

则 C_{ρ^*} 是线性拓扑空间.

证明　对 φ, $\psi \in C_{\rho^*}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\alpha\varphi + \beta\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
\leqslant &\int_{-\infty}^{0} h(s)F(k_1\beta_1(\alpha)|P(\varphi)|^{[s,0]} + k_1\beta_1(\beta)|P(\psi)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)\left[F(k_1\beta_1(\alpha)|P(\varphi)|^{[s,0]}) + F(k_1\beta_1(\beta)|P(\psi)|^{[s,0]})\right]\mathrm{d}\mu(s)$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)\left[F(k_1k^*|P(\varphi)|^{[s,0]}) + F(k_1k^*|P(\psi)|^{[s,0]})\right]\mathrm{d}\mu(s)$$

$$\leqslant k_1k^*[\rho^*(\varphi,0)+\rho^*(\psi,0)] < \infty,$$

其中, k^* 为正整数且 $k^* > \max\{\beta_1(\alpha),\beta_2(\beta)\}$. 因此 $\alpha\varphi+\beta\psi \in C_{\rho^*}$, 故 C_{ρ^*} 是线性空间.

令 $\varphi_n,\varphi_0,\psi_n,\psi_0 \in C_{\rho^*}$ 且 $\rho^*(\varphi_n,\varphi_0)\to 0,\ \rho^*(\psi_n,\psi_0)\to 0,\ n\to\infty$. 易见

$$\rho^*(\varphi_n,0)\to\rho^*(\varphi_0,0),\ \rho^*(\psi_n,0)\to\rho^*(\psi_0,0),\quad n\to\infty. \tag{4.4.1}$$

因为 $\rho^*(\varphi_n,\varphi_0)\to 0,\ n\to\infty$, 故对充分大的 n 有

$$\begin{aligned}1 \geqslant \rho^*(\varphi_n,\varphi_0) &= \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\varphi_n)-P(\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &\geqslant \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_n)-P(\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\ &\geqslant F(|P(\varphi_n)-P(\varphi_0)|^{[-\beta,0]})\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)\mathrm{d}\mu(s).\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

由此得

$$|P(\varphi_n)-P(\varphi_0)|^{[-\beta,0]} \leqslant F^{-1}\left(\left(\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)\mathrm{d}\mu(s)\right)^{-1}\right) := \lambda(\beta),$$

$$|P(\varphi_n)|^{[-\beta,0]} \leqslant \lambda(\beta) + |P(\varphi_0)|^{[-\beta,0]}$$

和

$$|\varphi_n|^{[-\beta,0]} \leqslant \xi_1^{-1}(\lambda(\beta)+|P(\varphi_0)|^{[-\beta,0]}) := \lambda_1(\beta).$$

同理可证

$$|\psi_n|^{[-\beta,0]} \leqslant \xi_1^{-1}(\lambda(\beta)+|P(\psi_0)|^{[-\beta,0]}) := \lambda_2(\beta).$$

由 (4.4.2) 得

$$|P(\varphi_n)-P(\varphi_0)|^{[-\beta,0]} \to 0,\quad n\to\infty.$$

因为 $|\varphi_n|^{[-\beta,0]}$ 有界, 故

$$|\varphi_n - \varphi_0|^{[-\beta,0]} \to 0, \quad n \to \infty$$

和

$$|\psi_n - \psi_0|^{[-\beta,0]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 选取充分大的 $\beta > 0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{-\beta} 3k_1 h(s)(F(|P(\varphi_0)|^{[s,0]}) + F(|P(\psi_0)|^{[s,0]}))\mathrm{d}\mu(s) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对此 β 有

$$|\varphi_n + \psi_n|^{[-\beta,0]} \leqslant |\varphi_n|^{[-\beta,0]} + |\psi_n|^{[-\beta,0]} \leqslant \lambda_1(\beta) + \lambda_2(\beta).$$

令 L_β 是 $p(x)$ 的 Lipschitz 常数, 则有

$$\begin{aligned}
\rho^*(\varphi_n + \psi_n, \varphi_0 + \psi_0) &= \int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(\varphi_n + \psi_n) - P(\varphi_0 + \psi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&= \int_{-\beta}^{0} h(s)F(|P(\varphi_n + \psi_n) - P(\varphi_0 + \psi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_n + \psi_n) - P(\varphi_0 + \psi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
&:= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

显然有

$$I_1 \leqslant kL_\beta \int_{-\beta}^{0} h(s)\mathrm{d}\mu(s)(|\varphi_n - \varphi_0|^{[-\beta,0]} + |\psi_n - \psi_0|^{[-\beta,0]}),$$

故存在 $N_1 > 0$, 使得当 $n > N_1$ 时有 $I_1 < \varepsilon/2$. 由 (4.4.1) 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_n)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) = \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s),$$

因此存在 $N_2 > 0$, 使得当 $n > N_2$ 时有

$$\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_n)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \leqslant 2 \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s).$$

类似地, 存在 $N_3 > 0$, 使得当 $n > N_3$ 时有

$$\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\psi_n)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \leqslant 2\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\psi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s).$$

当 $n > \max\{N_2, N_3\}$ 时有

$$\begin{aligned}
I_2 \leqslant & \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_n+\psi_n)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
& + \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(|P(\varphi_0+\psi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
\leqslant & \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(k_1|P(\varphi_n)|^{[s,0]} + k_1|P(\psi_n)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
& + \int_{-\infty}^{-\beta} h(s)F(k_1|P(\varphi_0)|^{[s,0]} + k_1|P(\psi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s) \\
\leqslant & k_1\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)(F(|P(\varphi_n)|^{[s,0]}) + F(|P(\psi_n)|^{[s,0]}))\mathrm{d}\mu(s) \\
& + k_1\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)(F(|P(\varphi_0)|^{[s,0]}) + F(|P(\psi_0)|^{[s,0]}))\mathrm{d}\mu(s) \\
\leqslant & 3k_1\int_{-\infty}^{-\beta} h(s)(F(|P(\varphi_0)|^{[s,0]}) + F(|P(\psi_0)|^{[s,0]}))\mathrm{d}\mu(s) < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

当 $n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$ 时有

$$\rho^*(\varphi_n+\psi_n, \varphi_0+\psi_0) \leqslant I_1 + I_2 < \varepsilon,$$

即

$$\rho^*(\varphi_n+\psi_n, \varphi_0+\psi_0) \to 0, \quad n \to \infty.$$

令 $\varphi_n, \varphi_0 \in C_{\rho^*}$, α_n, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ 且 $\rho^*(\varphi_n, \varphi_0) \to 0$, $|\alpha_n - \alpha_0| \to 0$, $n \to \infty$, 则有

$$\rho^*(\alpha_n\varphi_n,\alpha_0\varphi_0)=\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|P(\alpha_n\varphi_n)-P(\alpha_0\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{0}h(s)F(\beta_1(\alpha_n)|P(\varphi_n)-P(\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)$$
$$+\int_{-\infty}^{0}h(s)F(\beta_2(\alpha_n-\alpha_0))|P(\varphi_0)|^{[s,0]}\mathrm{d}\mu(s):=J_1+J_2.$$

因 $\beta_1(\alpha_n)$ 有界, 故可设 $\beta_1(\alpha_n)<M$, 其中, M 是一个正整数. 于是

$$J_1\leqslant M\int_{-\infty}^{0}h(s)F(|P(\varphi_n)-P(\varphi_0)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)=M\rho^*(\varphi_n,\varphi_0)\to 0,\quad n\to\infty.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_2(\alpha_n-\alpha_0)=0$, 故存在正整数 M_1, 使得 $\beta_2(\alpha_n-\alpha_0)\leqslant M_1$, 故 $h(s)F(M_1|P(\varphi_0)|^{[s,0]})$ 可被选取作为控制函数. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\beta_2(\alpha_n-\alpha_0)=0,$$

由控制收敛定理得到 $\lim\limits_{n\to\infty}J_2=0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\rho^*(\alpha_n\varphi_n,\alpha_0\varphi_0)=0.$$

引理得证. ■

定理 4.4.1 设

(1) C_ρ^* 是局部凸的线性拓扑空间;

(2) $f(t,\varphi)$ 关于 t 是 ω 周期函数;

(3) 对任意 $\alpha>0$, 存在 $L(t,\alpha)>0$, 使得只要 $\rho^*(\varphi,0)\leqslant\alpha$, 就有 $|f(t,\varphi)|\leqslant L(t,\alpha)$, 其中, $L(t,s)$ 连续;

(4) 方程 (4.2.1) 的解是 ρ^* 一致有界和 ρ^* 一致最终有界的,

则方程 (4.2.1) 有 $k\omega$ 周期解, 其中, k 是正整数.

证明 令方程 (4.2.1) 的解关于界 b 是 ρ^* 一致最终有界的.

设 $\rho^*(\varphi,0)\leqslant lF(\xi(2b))>0$, 则由一致有界性知存在 $N(lF(\xi(2b)))>0$, 使得

$$|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant N(lF(\xi(2b))),\quad t\geqslant\sigma.$$

考虑集合

$$S=\{\psi\in C_{\rho^*}|\rho^*(\psi,0)\leqslant lF(\xi(2b)),\ |\psi|^{\mathbb{R}^-}\leqslant N(lF(\xi(2b)))\}$$

对 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t)$, $\varphi\in S$ 有

$$\begin{aligned}\rho^*(x_t,0)&=\int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(x_t)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\&\leqslant\int_{-\infty}^{0} h(s)F(\xi(N(lF(\xi(2b)))))\mathrm{d}\mu(s)\\&=lF(\xi(N(lF(\xi(2b))))):=\lambda.\end{aligned}$$

记 $L=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}|L(t,\lambda)|$ 及

$$S_0=\{\psi\in S||\psi(\theta_1)-\psi(\theta_2)|\leqslant L|\theta_1-\theta_2|,\ \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}^-\}.$$

由引理 4.4.1 知 S_0 是 S 中的凸紧集. 对 $\varphi\in S_0$, 由 ρ^* 一致最终有界性知存在 $T>0$, 使得当 $t\geqslant\sigma+T$ 时有 $|x(\sigma,\varphi)(t)|\leqslant b$ 以及

$$\begin{aligned}\rho^*(x_t,0)&=\int_{-\infty}^{0} h(s)F(|P(x_t)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\&=\left(\int_{-\infty}^{-(t-(\sigma+T))}+\int_{-(t-(\sigma+T))}^{0}\right)h(s)F(|P(x_t)|^{[s,0]})\mathrm{d}\mu(s)\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-(t-(\sigma+T))} h(s)F(\xi(N(lF(\xi(2b)))))\mathrm{d}\mu(s)\\&\quad+\int_{-(t-(\sigma+T))}^{0} h(s)F(\xi(b))\mathrm{d}\mu(s):=I_1+I_2.\end{aligned}$$

显然有 $I_2\leqslant lF(\xi(b))$. 存在 $T_1>0$, 使得当 $t-(\sigma+T)\geqslant T_1$ 时有

$$\int_{-\infty}^{-T_1} h(s)\mathrm{d}\mu(s)\leqslant\frac{l(F(\xi(2b))-F(\xi(b)))}{F(\xi(N(lF(\xi(2b)))))},$$

则当 $t\geqslant\sigma+T_1+T$ 时有

$$\rho^*(x_t,0)\leqslant lF(\xi(b))+l(F(\xi(2b))-F(\xi(b)))=lF(\xi(2b)).$$

令整数 $k>0$ 充分大, 使得 $k\omega>T+T_1$. 对任意 $\varphi\in C_{\rho^*}$, $\sigma\geqslant 0$, 定义映射 $T:S_0\to C_{\rho^*}$ 如下:

$$(T\varphi)(\theta)=x_{\sigma+k\omega}(\sigma,\varphi)(\theta),\quad \theta\in\mathbb{R}^-.$$

T 是由 S_0 到自身的映射. 由定理 4.2.4 知映射 T 是连续的. 于是由 Schauder - Tychonov 定理知映射 T 在 S_0 中有不动点 φ^*, 容易证明 $x(\sigma,\varphi^*)(t)$ 是方程 (4.2.1) 的 $k\omega$ 周期解. 定理证毕. ∎

应用定理 4.4.1 研究 Volterra 方程 (4.3.1) 得到如下定理:

定理 4.4.2 设 $p(x)$ 满足上面提到的所有条件且引理 4.3.1、引理 4.3.2 和定理 4.3.3 的所有条件都成立, 又有

$$A(t+\omega)=A(t),\quad e(t+\omega)=e(t),\quad D(t+\omega,s+\omega)=D(t,s),$$

则方程 (4.3.1) 有 $k\omega$ 周期解.

证明 由定理 4.3.3 推得 ρ^* 一致有界性和一致最终有界性, 下面只需验证定理 4.4.1 的条件 (3) 成立即可. 有

$$\begin{aligned}|f(t,\varphi)|&\leqslant|A(t)||p(\varphi(0))|+\int_{-\infty}^{0}|D(t,t+s,\varphi(s))|\mathrm{d}s+|e(t)|\\&\leqslant\frac{1}{l}|A(t)|\rho^*(\varphi,0)+E(t,t)\int_{-\infty}^{0}h(s)|p(\varphi(s))|\mathrm{d}s+|e(t)|\\&\leqslant\left(\frac{|A(t)|}{l}+E(t,t)\right)\rho^*(\varphi,0)+1.\end{aligned}$$

这说明定理 4.4.1 的条件 (3) 成立. 由定理 4.4.2 知方程 (4.3.1) 有 $k\omega$ 周期解. ∎

4.5 局部理论的进一步发展: 相空间–方程对

设 $\mathscr{B}$ 是由 $\mathbb{R}^-$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的实值函数的集合, ρ 是 $\mathscr{B}$ 上的伪度量, 即 $(\mathscr{B},\rho)$ 是伪度量空间. 构造 $(\mathbb{R}\times\mathscr{B})$ 上的伪度量 d 如下:

$$d((t,\varphi),(s,\psi))=|t-s|+\rho(\varphi,\psi),\quad (t,\varphi),\ (s,\psi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{B}.$$

对任意 $\varphi\in\mathscr{B}$ 和 $A:0<A\leqslant+\infty$, $\sigma\in\mathbb{R}$, 令

$$x^p(\sigma,\varphi)(t)=\begin{cases}\varphi(t-\sigma), & t\in(-\infty,\sigma],\\ p(t), & t\in[\sigma,\sigma+A],\end{cases}$$

其中, $p\in C([\sigma,\sigma+A],\mathbb{R}^n):=C_{\sigma,A}$.

下面的主要目的是要去掉 4.1 节中的条件 (A_1), 也就是不再要求 x_t 关于 t 是连续的. 这个条件对某些重要的相空间, 如 BC 加上确界模所构成的空间, 是不满足的.

设相空间 $\mathscr{B}$ 和泛函微分方程 (4.2.1) 满足如下条件:

($\mathcal{A}_1$) 对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$ 和 $p \in C_{\sigma,A}$ 有 $x_t^p(\sigma,\varphi) \in \mathscr{B}$, 且 $f(t, x_t^p(\sigma,\varphi))$ 对任意给定的 $\varphi \in \mathscr{B}$ 关于 $(t,p) \in [\sigma, \sigma+A] \times C_{\sigma,A}$ 连续;

($\mathcal{A}_2$) 存在连续函数 $K : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 和 $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 使得对任意 (t,p,φ), $(t,q,\psi) \in [\sigma,\sigma+A] \times C_{\sigma,A} \times \mathscr{B}$ 有

$$\rho(x_t^p(\sigma,\varphi), x_t^q(\sigma,\psi)) \leqslant K(t-\sigma)|p-q|^{[\sigma,t]} + M(t-\sigma)\rho(\varphi,\psi).$$

引理 4.5.1 如果对任意 $\varphi \in \mathscr{B}$, $p \in C_{\sigma,A}$, $x_t^p(\sigma,\varphi) \in \mathscr{B}$ 且关于 $t \in [\sigma,\sigma+A]$ 连续, 又 $f(t,\varphi)$ 关于 (t,φ) 连续, 则由 ($\mathcal{A}_2$) 可推出 ($\mathcal{A}_1$).

证明 设 $p, p_0 \in C_{\sigma,A}$, $\varphi, \varphi_0 \in \mathscr{B}$ 及 $|p-p_0|^{[\sigma,\sigma+A]} \to 0$, $\rho(\varphi,\varphi_0) \to 0$. 只需证明

$$|f(t, x_t^p(\sigma,\varphi)) - f(t_0, x_{t_0}^{p_0}(\sigma,\varphi_0))| \to 0, \quad t \to t_0 \tag{4.5.1}$$

即可, 其中, $t, t_0 \in [\sigma, \sigma+A]$.

由 ($\mathcal{A}_2$) 有

$$\begin{aligned}
&\rho(x_t^p(\sigma,\varphi), x_{t_0}^{p_0}(\sigma,\varphi_0)) \\
\leqslant\ &\rho(x_t^p(\sigma,\varphi), x_t^{p_0}(\sigma,\varphi_0)) + \rho(x_t^{p_0}(\sigma,\varphi_0), x_{t_0}^{p_0}(\sigma,\varphi_0)) \\
\leqslant\ &K(t-\sigma)|p-p_0|^{[\sigma,t]} + M(t-\sigma)\rho(\varphi,\varphi_0) + \rho(x_t^{p_0}(\sigma,\varphi_0), x_{t_0}^{p_0}(\sigma,\varphi_0)).
\end{aligned}$$

显然有

$$K(t-\sigma)|p-p_0|^{[\sigma,t]} \to 0, \quad |p-p_0|^{[\sigma,\sigma+A]} \to 0,$$

$$M(t-\sigma)\rho(\varphi,\varphi_0) \to 0, \quad \rho(\varphi,\varphi_0) \to 0$$

和

$$\rho(x_t^{p_0}(\sigma,\varphi_0), x_{t_0}^{p_0}(\sigma,\varphi_0)) \to 0, \quad t \to t_0.$$

因此有

$$\rho(x_t^p(\sigma,\varphi), x_{t_0}^{p_0}(\sigma,\varphi_0)) \to 0, \quad (t,p,\varphi) \to (t_0,p_0,\varphi_0),$$

这就证明了 (4.5.1). ■

定理 4.5.1 如果 $(f,\mathscr{B})$ 满足 ($\mathcal{A}_1$), 则对任意 $(\sigma,\varphi_0) \in [\sigma,\sigma+A] \times \mathscr{B}$, 存在 $b > 0$, 使得初值问题

$$x' = f(t, x_t), \quad x_\sigma = \varphi_0 \tag{4.5.2}$$

有定义在 $(-\infty, \sigma+b]$ 上的解.

证明　可以设 $A<+\infty$. 显然集合

$$U=\{(t,p)\in[\sigma,\sigma+A]\times C_{\sigma,A}||f(t,x_t^p(\sigma,\varphi_0))-f(\sigma,\varphi_0)|<1\}$$

是 $[\sigma,\sigma+A]\times C_{\sigma,A}$ 中的开集, 而集合

$$V=\left\{(t,p)\in[\sigma,\sigma+A]\times C_{\sigma,A}||f(t,x_t^p(\sigma,\varphi_0))-f(\sigma,\varphi_0)|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

则是 $[\sigma,\sigma+A]\times C_{\sigma,A}$ 中的闭集且 $V\subset U$. 由 Tietze 扩张定理, 存在连续函数 $f_1:[\sigma,\sigma+A]\times C_{\sigma,A}\to\mathbb{R}^n$, 使得

$$|f_1(t,p)|\leqslant|f(\sigma,\varphi_0)|+\frac{1}{2}:=M$$

和

$$f_1(t,p)=f(t,x_t^p(\sigma,\varphi_0)),\quad (t,p)\in V.$$

令

$$S=\{p\in C_{\sigma,A}|p(\sigma)=\varphi_0(0),\ |p(t_1)-p(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|,\ t_1,t_2\in[\sigma,\sigma+A]\}.$$

易见当赋予上确界模时, $C_{\sigma,A}$ 成为 Banach 空间且 S 是 $C_{\sigma,A}$ 中的凸紧集.

定义映射 $F:S\to C_{\sigma,A}$ 如下:

$$F(p)(t)=\varphi_0(0)+\int_\sigma^t f_1(s,p)\mathrm{d}s,\quad (t,p)\in[\sigma,\sigma+A]\times C_{\sigma,A}.$$

显然 F 是 S 到自身的映射. 下面来证明 F 的连续性.

设 $p_n\in S$, $n=0,1,2,\cdots$ 一致收敛于 p_0, 有

$$|F(p_n)-F(p_0)|^{[\sigma,\sigma+A]}\leqslant\int_\sigma^{\sigma+A}|f_1(s,p_n)-f_1(s,p_0)|\mathrm{d}s.$$

由控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}|F(p_n)-F(p_0)|^{[\sigma,\sigma+A]}=0.$$

因此, F 在 S 上连续. 由 Schauder 不动点定理知 F 在 S 上有不动点 p^*.

因为

$$f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi_0))-f(\sigma,\varphi_0)=f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi_0))-f(\sigma,x_\sigma^{p^*}(\sigma,\varphi_0)),$$

故对充分小的 $b>0$ 有

$$|f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi_0))|\leqslant|f(\sigma,\varphi_0)|+\frac{1}{2},\quad t\in[\sigma,\sigma+b].$$

于是对 $t\in[\sigma,\sigma+b]$ 有

$$(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi_0))\in V,$$

由此得

$$f_1(t,p^*)=f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi_0)).$$

于是有

$$p^*(t)=\varphi_0(0)+\int_\sigma^t f(s,x_s^{p^*}(\sigma,\varphi_0))\mathrm{d}s,\quad t\in(-\infty,\sigma+b].$$

由引理 4.2.3 知, $x^{p^*}(\sigma,\varphi_0)(t),t\in(-\infty,b]$ 是方程 (4.5.2) 的解. 定理证毕. ∎

为了得到方程 (4.5.2) 的解的唯一性, 需要如下条件:

$(\mathcal{A}_3)$ 存在连续函数 $n(t)$, 使得对 $t\in[\sigma,\sigma+A]$, $\varphi\in\mathscr{B}$, $p,q\in C_{\sigma,A}$ 有

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^q(\sigma,\varphi))|\leqslant n(t)|p-q|^{[\sigma,t]};$$

$(\mathcal{A}_3')$ 存在连续函数 $n(t)$, 使得

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant n(t)\rho(\varphi,\psi),\quad t\in[\sigma,\sigma+A],\ \varphi,\psi\in\mathscr{B}.$$

引理 4.5.2 由 $(\mathcal{A}_2)$ 和 $(\mathcal{A}_3')$ 可推出 $(\mathcal{A}_3)$.

证明 由 $(\mathcal{A}_2)$ 和 $(\mathcal{A}_3)$ 有

$$\begin{aligned}|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^q(\sigma,\varphi))|&\leqslant n(t)\rho(x_t^p(\sigma,\varphi),x_t^q(\sigma,\varphi))\\&\leqslant n(t)K(t-\sigma)|p-q|^{[\sigma,t]}.\end{aligned}$$ ∎

定理 4.5.2 若 $(\mathcal{A}_1)$ 和 $(\mathcal{A}_3)$ 成立, 则初值问题 (4.5.2) 至多存在一个解.

证明 设 $x^p(\sigma,\varphi)$ 和 $x^q(\sigma,\varphi)$ 是方程 (4.5.2) 的定义在 $(-\infty,\sigma+b]$, $0<b\leqslant A$ 上的两个解. 对 $t\in[\sigma,\sigma+b]$, 由 $(\mathcal{A}_3)$ 有

$$\begin{aligned}|x^p(\sigma,\varphi)(t)-x^q(\sigma,\varphi)(t)|&=|p(t)-q(t)|\\&\leqslant\int_\sigma^t|f(s,x_s^p(\sigma,\varphi))-f(s,x_s^q(\sigma,\varphi))|\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_\sigma^t n(s)|p-q|^{[\sigma,s]}\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_\sigma^{\sigma+b}n(s)\mathrm{d}s\cdot|p-q|^{[\sigma,\sigma+b]}.\end{aligned}\tag{4.5.3}$$

若 $b>0$ 充分小, 则有

$$0 \leqslant \int_{\sigma}^{\sigma+b} n(s)\mathrm{d}s < 1.$$

由 (4.5.3) 有

$$|p-q|^{[\sigma,\sigma+b]} \leqslant \int_{\sigma}^{\sigma+b} n(s)\mathrm{d}s \cdot |p-q|^{[\sigma,\sigma+b]}.$$

由此得 $|p-q|^{[\sigma,\sigma+b]}=0$. 定理得证. ∎

在下面的讨论中, 进一步假设

$(\mathcal{A}_4)$ $f(t,\varphi)$ 在 $[\sigma,\sigma+A]\times\mathscr{B}$ 上连续;

$(\mathcal{A}_5)$ 存在正数 K_1, 使得

$$|\varphi(0)-\psi(0)| \leqslant K_1\rho(\varphi,\psi), \quad \varphi,\psi\in\mathscr{B}.$$

定理 4.5.3　设条件 $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ 和 $(\mathcal{A}_4)$ 成立, 若 W 是 $[\sigma,\sigma+A]\times\mathscr{B}$ 中的紧集, $(\sigma,\varphi)\in W$ 且 $x^p(\sigma,\varphi)$ 是方程 (4.5.2) 的定义在 $(-\infty,c)$, $\sigma<c\leqslant\sigma+A$ 上的饱和解, 则存在 $t^*>\sigma$, 使得

$$(t^*,x^p_{t^*}(\sigma,\varphi))\in[\sigma,\sigma+A]\times\mathscr{B}-W.$$

证明　易见 (4.5.2) 的解存在且唯一, $f(t,\varphi)$ 在 W 上有界, 设为 M. 存在 W 的开邻域 V, 使得 f 在 V 的闭包 $\bar{V}$ 上有界.

如果 $c=+\infty$ 且当 $t\geqslant\sigma$ 时, $(t,x^p_t(\sigma,\varphi))\in W$, 则序列

$$\{(\sigma+n,x^p_{\sigma+n}(\sigma,\varphi))\}$$

具有不收敛的子序列, 这与 W 的紧性矛盾.

如果 $c<+\infty$ 且 $f(t,x^p_t(\sigma,\varphi))$ 在 $[\sigma,c)$ 上有界, 则易见极限 $\lim\limits_{t\to c^-}p(t)$ 存在 (利用 Cauchy 收敛准则). 因此 $x^p(\sigma,\varphi)$ 可以看成是连续延展到了 $t=c$. 这与 $x^p(\sigma,\varphi)$ 是 $(-\infty,c)$ 上的饱和解相矛盾.

如果 $c<+\infty$ 且 $f(t,x^p_t(\sigma,\varphi))$ 在 $[\sigma,c)$ 上无界, 则存在 $t^*>\sigma$, 使得

$$|f(t^*,x^p_{t^*}(\sigma,\varphi))|>M,$$

故有

$$(t^*,x^p_{t^*}(\sigma,\varphi))\notin W.$$

定理证毕. ∎

定理 4.5.4 设 $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 成立, 如果 W 是 $[\sigma,\sigma+A]\times\mathscr{B}$ 中的紧集,$(\sigma,\varphi)\in W$ 且 $x^p(\sigma,\varphi)$ 是方程 (4.5.2) 的定义在 $(-\infty,c)$ 上的饱和解, 其中, $\sigma<c\leqslant\sigma+A$, 则存在 $t^*>\sigma$, 使得

$$(t^*,x_{t^*}^p(\sigma,\varphi))\in[\sigma,\sigma+A]\times\mathscr{B}-W.$$

证明 由定理 4.5.3 的证明知若 $c=+\infty$, 则定理显然成立; 若 $c<+\infty$ 且 $f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))$ 在 $[\sigma,c)$ 上有界, 则这将与 $x^p(\sigma,\varphi)$ 是 $(-\infty,c)$ 上的饱和解相矛盾. 因此, 假设 $c<+\infty$ 且 $f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))$ 在 $[\sigma,c)$ 上无界. 令

$$p^*(t)=p(\sigma),\quad t\geqslant\sigma.$$

如果对 $t\in[\sigma,c)$ 有 $|p|^{[\sigma,t]}\leqslant\alpha<+\infty$, 则有

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi))|\leqslant n(t)|p-p^*|^{[\sigma,t]}\leqslant 2\alpha\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant c}n(t):=b.$$

由此得

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))|\leqslant b+\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant c}|f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi))|<+\infty.$$

这与 $f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))$ 在 $[\sigma,c)$ 上无界相矛盾.

如果 $|p|^{[\sigma,t]}$, $t\in[\sigma,c)$ 是无界的, 则对正整数 $k>p(\sigma)$, 存在 $t_k\in[\sigma,c)$, 使得

$$|p|^{[\sigma,t_k]}=|p(t_k)|=k,$$

有

$$x_{t_k}^p(\sigma,\varphi)(0)=k.$$

由 $(\mathcal{A}_5)$ 可得

$$\rho(x_{t_i}^p(\sigma,\varphi),x_{t_j}^p(\sigma,\varphi))\geqslant\frac{1}{K_1}|i-j|,$$

故序列 $\{(t_k,x_{t_k}^p(\sigma,\varphi))\}$ 没有收敛子列. 由 W 的紧性完成证明. ∎

定理 4.5.5 设 $(\mathcal{A}_1)\sim(\mathcal{A}_3)$ 成立, 如果 W 是 $[\sigma,\sigma+A]\times\mathscr{B}$ 中的紧集, $(\sigma,\varphi)\in W$ 且 $x^p(\sigma,\varphi)$ 是方程 (4.5.2) 的定义在 $[\sigma,c)$ 上的饱和解, 则只要 p 有界, 就可推得 $c=+\infty$.

证明 对 $t\in[\sigma,c)$, 设 $|p|^{[\sigma,t]}\leqslant\alpha<+\infty$. 用与定理 4.5.4 证明中相同的方法定义 p^* 有

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi))|\leqslant 2\alpha n(t).$$

如果 $c<+\infty$, 则有

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))|\leqslant 2\alpha\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant c}n(t)+\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant c}|f(t,x_t^{p^*}(\sigma,\varphi))|.$$

这说明极限 $\lim\limits_{t\to c^-} p(t)$ 存在. 因此 $x^p(\sigma,\varphi)$ 可以看成是延展到了区间 $(-\infty,c]$ 上. 这个矛盾证明了定理. ∎

定理 4.5.6　设条件 $(\mathcal{A}_1),(\mathcal{A}_2),(\mathcal{A}_3')$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 成立, 如果 $\varphi_n\in\mathscr{B}$, $n=0,1,2,\cdots$, $\rho(\varphi_n,\varphi_0)\to 0$, $n\to\infty$ 且 $x^{p_n}(\sigma,\varphi_n)$, $n=0,1,2,\cdots$ 都是方程 (4.5.2) 定义在区间 $(-\infty,\sigma+A]$, $A<+\infty$ 上的解, 则存在连续函数 $L:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, 使得

$$|p_n-p_0|^{[\sigma,\sigma+A]}\leqslant L(A)\rho(\varphi_n,\varphi_0),\quad n=1,2,\cdots.$$

证明　由 $(\mathcal{A}_2),(\mathcal{A}_3')$ 和 $(\mathcal{A}_5)$, 对 $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 有

$$\begin{aligned}|p_n(t)-p_0(t)|&\leqslant|p_n(\sigma)-p_0(\sigma)|+\int_\sigma^t|f(s,x_s^{p_n}(\sigma,\varphi_n))-f(s,x_s^{p_0}(\sigma,\varphi_0))|\mathrm{d}s\\&\leqslant|\varphi_n(0)-\varphi_0(0)|+\int_\sigma^t n(s)|p_n-p_0|^{[\sigma,s]}\mathrm{d}s\\&\leqslant K_1^*\rho(\varphi_n,\varphi_0)+n_1^*\int_\sigma^t|p_n-p_0|^{[\sigma,s]}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}&n^*=\sup_{\sigma\leqslant s\leqslant\sigma+A}n(s),\quad K^*=\sup_{0\leqslant s\leqslant A}K(s),\quad M^*=\sup_{0\leqslant s\leqslant A}M(s),\\&K_1^*=K_1+An^*M^*,\quad n_1^*=K^*n^*.\end{aligned}$$

如果 $|p_n(t)-p_0(t)|<|p_n-p_0|^{[\sigma,t]}$, 则存在 $t^*\in[\sigma,t)$, 使得

$$|p_n(t^*)-p_0(t^*)|=|p_n-p_0|^{[\sigma,t^*]}$$

和

$$|p_n(s)-p_0(s)|<|p_n-p_0|^{[\sigma,s]}=|p_n-p_0|^{[\sigma,t^*]},\quad t^*<s\leqslant t.$$

由此得

$$\begin{aligned}|p_n-p_0|^{[\sigma,t]}&=|p_n-p_0|^{[\sigma,t^*]}=|p_n(t^*)-p_0(t^*)|\\&\leqslant K_1^*\rho(\varphi_n,\varphi_0)+n_1^*\int_\sigma^{t^*}|p_n-p_0|^{[\sigma,s]}\mathrm{d}s\\&\leqslant K_1^*\rho(\varphi_n,\varphi_0)+n_1^*\int_\sigma^{t}|p_n-p_0|^{[\sigma,s]}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

如果 $|p_n(t)-p_0(t)|=|p_n-p_0|^{[\sigma,t]}$, 则有

$$|p_n-p_0|^{[\sigma,t]}=|p_n(t)-p_0(t)|\leqslant K_1^*\rho(\varphi_n,\varphi_0)+n_1^*\int_\sigma^t|p_n-p_0|^{[\sigma,s]}\mathrm{d}s.$$

应用 Gronwall 不等式得到

$$|p_n - p_0|^{[\sigma,t]} \leqslant K_1^* \rho(\varphi_n, \varphi_0) \mathrm{e}^{n_1^* A}, \quad t \in [\sigma, \sigma + A].$$

定义 $L(A) = K_1^* \mathrm{e}^{n_1^* A}$ 有

$$|p_n - p_0|^{[\sigma,\sigma+A]} \leqslant L(A) \rho(\varphi_n, \varphi_0).$$

定理证毕. ∎

定理 4.5.7 如果定理 4.5.6 的条件成立, 则存在连续函数 $J: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, 使得

$$\rho(x_t^{p_n}(\sigma, \varphi_n), x_t^{p_0}(\sigma, \varphi_0)) \leqslant J(A) \rho(\varphi_n, \varphi_0), \quad t \in [\sigma, \sigma + A].$$

证明 由 $(\mathcal{A}_2)$ 和定理 4.5.6 有

$$\begin{aligned}\rho(x_t^{p_n}(\sigma, \varphi_n), x_t^{p_0}(\sigma, \varphi_0)) &\leqslant K(t-\sigma)|p_n - p_0|^{[\sigma,t]} + M(t-\sigma)\rho(\varphi_n, \varphi_0) \\ &\leqslant [K^* L(A) + M^*] \rho(\varphi_n, \varphi_0) := J(A) \rho(\varphi_n, \varphi_0),\end{aligned}$$

其中,

$$K^* = \sup_{0 \leqslant s \leqslant A} K(s), \quad M^* = \sup_{0 \leqslant s \leqslant A} M(s).$$

定理证毕. ∎

4.6 对 Volterra 方程的应用

作为应用, 本节考虑 Volterra 积分微分方程

$$x'(t) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^{0} C(t, t+s) x(t+s) \mathrm{d}s + f(t), \tag{4.6.1}$$

其中, $x, f \in \mathbb{R}^n$, A, C 是连续矩阵函数, f 是连续函数.

Seifert[136] 证明了存在连续线性函数 $F: BC \to \mathbb{R}^2$ 和 $\varphi \in BC$, 使得如下初值问题:

$$x' = F(x_t), \quad x_0 = \varphi$$

连 Carethéodory 型的解也没有. 主要的困难在于: 存在连续函数 $x: (-\infty, A) \to \mathbb{R}^n, A > 0$, 满足 $x_0 \in BC$, 但 x_t 关于 t, $t \geqslant 0$ 不连续. $x(t) = \sin t^2$ 就是一个例子. 因而空间 BC 就被 [24, 68, 71, 92, 94, 134] 等文献所发展的相空间理论排除在外, 因为它们都要求 x_t 是连续的.

方程 (4.6.1) 的右端泛函可以表示为如下形式:

$$f(t,\varphi)=A(t)\varphi(0)+\int_{-\infty}^{0}C(t,t+s)\varphi(s)\mathrm{d}s+f(t),$$

由此可得

$$\begin{aligned}f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))&=A(t)p(t)+\int_{-\infty}^{0}C(t,t+s)x_t^p(\sigma,\varphi)(s)\mathrm{d}s+f(t)\\&=A(t)p(t)+\int_{-\infty}^{\sigma}C(t,s)\varphi(s-\sigma)\mathrm{d}s+\int_{\sigma}^{t}C(t,s)p(s)\mathrm{d}s+f(t).\end{aligned}$$

定理 4.6.1　对 $(BC,(4.6.1))$, 定义 $\rho(\varphi,\psi)=|\varphi-\psi|^{\mathbb{R}^-}$.

(1) 如果

$$c^*(t):=\int_{-\infty}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s<\infty,\quad t\in\mathbb{R}\tag{4.6.2}$$

是 t 的连续函数, 则 $(\mathcal{A}_2),(\mathcal{A}_3),(\mathcal{A}_3')$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 成立;

(2) 如果 (4.6.2) 成立且有

$$\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{0}|C(t+\delta,s)-C(t,s)|\mathrm{d}s=0,$$

则 $(\mathcal{A}_1)$ 成立;

(3) 如果 (4.6.2) 成立且有

$$\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{0}|C(t+\delta,t+\delta+s)-C(t,t+s)|\mathrm{d}s=0,$$

则 $(\mathcal{A}_4)$ 成立.

证明　$(\mathcal{A}_2)$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 显然成立. 对任意 $\varphi\in BC$ 和 $p,q\in C_{\sigma,A}$ 有

$$\begin{aligned}|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^q(\sigma,\varphi))|&\leqslant|A(t)||p(t)-q(t)|+\int_{\sigma}^{t}|C(t,s)||p(s)-q(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\left(|A(t)|+\int_{\sigma}^{t}|C(t,s)|\mathrm{d}s\right)|p-q|^{[\sigma,t]}.\end{aligned}$$

因此 $(\mathcal{A}_3)$ 成立.

如果 $c^*(t)$ 关于 t 连续, 对 $\varphi,\psi\in BC$ 有

$$\begin{aligned}|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|&\leqslant|A(t)||\varphi(0)-\psi(0)|+\int_{-\infty}^{0}|C(t,t+s)||\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant(K_1|A(t)|+c^*(t))|\varphi-\psi|^{\mathbb{R}^-}.\end{aligned}$$

由此推得 $(\mathcal{A}_3')$.

因为

$$\begin{aligned}&|f(t+\delta,x_{t+\delta}^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))|\\\leqslant&|A(t+\delta)p(t+\delta)-A(t)p(t)|+|f(t+\delta)-f(t)|+\int_t^{t+\delta}|C(t+\delta,s)||p(s)|\mathrm{d}s\\&+\int_{-\infty}^{\sigma}|C(t+\delta,s)-C(t,s)||\varphi(s-\sigma)|\mathrm{d}s\\&+\int_{\sigma}^{t}|C(t+\delta,s)-C(t,s)||p(s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

为证 $(\mathcal{A}_1)$, 只需证明

$$\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{\sigma}|C(t+\delta,s)-C(t,s)||\varphi(s-\sigma)|\mathrm{d}s=0$$

即可. 但由给定条件, 上式是显然的. 因此 (2) 得证.

对 $\varphi,\psi\in BC$ 有

$$\begin{aligned}|f(t+\delta,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant&|A(t+\delta)\varphi(0)-A(t)\psi(0)|+|f(t+\delta)-f(t)|\\&+\int_{-\infty}^{0}|C(t,t+s)||\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s\\&+\int_{-\infty}^{0}|C(t+\delta,t+\delta+s)-C(t,t+s)||\varphi(s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由此及给定条件就推得 $(\mathcal{A}_4)$. ■

推论 4.6.1 如果 $(BC,(4.6.1))$ 的初值问题有解, 则此解必然是唯一的.

下面考虑相空间 $\mathscr{C}_g$, 但在其定义中不要求 $\varphi(s)/g(s)$ 在 $\mathbb{R}^-$ 上是一致连续的.

定理 4.6.2 对 $(\mathscr{C}_g,(4.6.1))$,

(1) $(\mathcal{A}_2),(\mathcal{A}_3)$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 成立;

(2) 如果

$$c^*(t) := \int_{-\infty}^{t} |C(t,s)|g(s-t)\mathrm{d}s < \infty, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.6.3}$$

关于 t 连续, 则 $(\mathcal{A}_3')$ 成立;

(3) 如果 (4.6.3) 成立且有

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{0} |C(t+\delta,s) - C(t,s)|g(s)\mathrm{d}s = 0,$$

则 $(\mathcal{A}_1)$ 成立;

(4) 如果 (4.6.3) 成立且有

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{0} |C(t+\delta,t+\delta+s) - C(t,t+s)|g(s)\mathrm{d}s = 0,$$

则 $(\mathcal{A}_4)$ 成立.

证明　对 $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_g$ 和 $p, q \in C_{\sigma,A}$ 有

$$\begin{aligned}
|x_t^p(\sigma,\varphi) - x_t^q(\sigma,\psi)|_g &= \sup_{s \leqslant 0} \frac{|x_t^p(\sigma,\varphi)(s) - x_t^q(\sigma,\psi)(s)|}{g(s)} \\
&\leqslant \sup_{\sigma - t \leqslant s \leqslant 0} \frac{|p(s+t) - q(s+t)|}{g(s)} \\
&\quad + \sup_{s \leqslant \sigma - t} \frac{|\varphi(s-\sigma+t) - \psi(s-\sigma+t)|}{g(s)} \\
&\leqslant \sup_{\sigma - t \leqslant s \leqslant 0} \frac{|p-q|^{[\sigma,t]}}{g(s)} + \sup_{s \leqslant 0} \frac{|\varphi(s) - \psi(s)|}{g(s)} \\
&\leqslant |p-q|^{[\sigma,t]} + |\varphi - \psi|_g.
\end{aligned}$$

因此 $(\mathcal{A}_2)$ 成立. $(\mathcal{A}_3)$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 的证明容易, 从略.

如果 $c^*(t)$ 关于 t 连续, 则有

$$\begin{aligned}
|f(t,\varphi) - f(t,\psi)| &\leqslant |A(t)||\varphi(0) - \psi(0)| + \int_{-\infty}^{0} |C(t,t+s)||\varphi(s) - \psi(s)|\mathrm{d}s \\
&\leqslant |A(t)||\varphi(0) - \psi(0)| + \int_{-\infty}^{0} |C(t,t+s)|g(s) \cdot \frac{|\varphi(s) - \psi(s)|}{g(s)}\mathrm{d}s \\
&\leqslant (K_1|A(t)| + c^*(t))|\varphi - \psi|_g.
\end{aligned}$$

这说明 $(\mathcal{A}_3')$ 成立. 类似地, 可以证明 (3) 和 (4). 定理证毕. ■

对 $\mathscr{C}_h$ 空间, 有如下定理:

定理 4.6.3 对 $(\mathscr{C}_h, (4.6.1))$,

(1) $(\mathcal{A}_2), (\mathcal{A}_3)$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 成立;

(2) 如果存在连续函数 $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, 使得

$$|C(t, t+s)| \leqslant E(t)h(s), \tag{4.6.4}$$

则 $(\mathcal{A}_1), (\mathcal{A}_3')$ 和 $(\mathcal{A}_4)$ 成立.

证明 $(\mathcal{A}_3)$ 和 $(\mathcal{A}_5)$ 显然成立. 对 $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_h$ 和 $p, q \in C_{\sigma,A}$ 有

$$\begin{aligned}
|x_t^p(\sigma,\varphi) - x_t^q(\sigma,\psi)|_h &= \int_{-\infty}^{-t} h(s)|x_t^p(\sigma,\varphi) - x_t^q(\sigma,\psi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-t}^{0} h(s)|x_t^p(\sigma,\varphi) - x_t^q(\sigma,\psi)|^{[s,0]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-t} h(s)\max\{|\varphi-\psi|^{[s,0]}, |p-q|^{[\sigma,t]}\}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-t}^{0} h(s)|p-q|^{[\sigma,t]}\mathrm{d}s \\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s \cdot |p-q|^{[\sigma,t]} + |\varphi-\psi|_h.
\end{aligned}$$

这说明 $(\mathcal{A}_2)$ 成立.

设 $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_h$, $p, q \in C_{\sigma,A}$, 如果 (4.6.4) 成立, 则有

$$\begin{aligned}
&|f(t, x_t^p(\sigma,\varphi)) - f(t, x_t^q(\sigma,\psi))| \\
\leqslant\, &|A(t)||\varphi(0)-\psi(0)| + \int_{-\infty}^{0} |C(t,t+s)||\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s \\
\leqslant\, &|A(t)||\varphi(0)-\psi(0)| + \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi-\psi|^{[s,0]}\mathrm{d}s \cdot E(t) \\
\leqslant\, &(K_1|A(t)| + E(t))|\varphi-\psi|_h.
\end{aligned}$$

因此, $(\mathcal{A}_3')$ 成立.

因为

$$\begin{aligned}|f(t+\delta,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^q(t,\psi))| &\leqslant |A(t+\delta)\varphi(0)-A(t)\psi(0)| \\ &\quad+\int_{-\infty}^{0}|C(t+\delta,t+\delta+s)\varphi(s)-C(t,t+s)\psi(s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant |A(t+\delta)\varphi(0)-A(t)\psi(0)| \\ &\quad+\int_{-\infty}^{0}|C(t+\delta,t+\delta+s)-C(t,t+s)||\varphi(s)|\mathrm{d}s \\ &\quad+\int_{-\infty}^{0}|C(t,t+s)||\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

为了证明 $(\mathcal{A}_4)$, 只需证明

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{0}|C(t+\delta,t+\delta+s)-C(t,t+s)||\varphi(s)|\mathrm{d}s=0. \tag{4.6.5}$$

因为当 δ 很小时有

$$|C(t+\delta,t+\delta+s)-C(t,t+s)||\varphi(s)|\leqslant 4E(t)h(s)|\varphi|^{[s,0]}.$$

故式 (4.6.5) 可由控制收敛定理得到. 因此, $(\mathcal{A}_4)$ 成立. 由引理 4.5.1, $(\mathcal{A}_1)$ 成立. ■

注意到在定理 4.6.1~ 定理 4.6.3 中都需要条件

$$\int_{-\infty}^{0}|C(t,t+s)|\mathrm{d}s<\infty.$$

下面证明, 为了保证方程 (4.6.1) 的初值问题解存在, 此条件并不是必需的.

定义

$$BC^*=\left\{\varphi\in BC\,\middle|\,\int_{-\infty}^{\sigma}C(t,s)\varphi(s-\sigma)\mathrm{d}s\ \text{关于}\ t\ \text{连续},\ t\in[\sigma,\sigma+A],A>0\right\}.$$

定理 4.6.4 $BC^*\neq\varnothing$ 且对 $(BC^*,(4.6.1))$ 来说, $(\mathcal{A}_1),(\mathcal{A}_2)\ (\mathcal{A}_3)$ 成立.

证明 易见 $0\in BC^*$, 故 $BC^*\neq\varnothing$. $(\mathcal{A}_1),(\mathcal{A}_2),(\mathcal{A}_3)$ 成立是显然的. ■

例 4.6.1 初值问题

$$x'(t)=x(t)+\int_{-\infty}^{t}(s+\cos t)^2x(s)\mathrm{d}s+t,\quad x_0=\mathrm{e}^s,\quad s\leqslant 0 \tag{4.6.6}$$

有且仅有一个解. 事实上, 由于

$$(s+\cos t)^2 \mathrm{e}^s \leqslant (1-s)^2 \mathrm{e}^s, \quad s \leqslant 0$$

和

$$\int_{-\infty}^{0} (1-s)^2 \mathrm{e}^s \mathrm{d}s < \infty,$$

故由控制收敛定理知 $\int_{-\infty}^{0} (s+\cos t)^2 \mathrm{e}^s \mathrm{d}s$ 关于 $t \in \mathbb{R}$ 连续, 因此 $\mathrm{e}^s \in BC^*$. 由定理 4.6.4 知方程 (4.6.6) 有且仅有一个解.

但在本例中,

$$\int_{-\infty}^{0} |C(t,s)| \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} (s+\cos t)^2 \mathrm{d}s$$

根本没有意义.

下面来考虑非线性 Volterra 方程

$$x'(t) = A(t, x(t)) + \int_{-\infty}^{t} C(s-t, x(s)) \mathrm{d}s, \tag{4.6.7}$$

其中, $A: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $C: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 都是连续的.

令

$$W = \left\{ \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \middle| \int_{-\infty}^{\sigma} C(s-t, \varphi(s-\sigma)) \mathrm{d}s \ \text{关于} \ t \ \text{连续}, t \in [\sigma, \sigma+A], A > 0 \right\}.$$

定义映射 $d: W \times W \to \mathbb{R}^+$ 如下:

$$d(\varphi, \psi) = \left| \int_{-\infty}^{0} (C(s, \varphi(s)) - C(s, \psi(s))) \mathrm{d}s \right|.$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\sigma} C(s-t, \varphi(s-\sigma)) \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\sigma-t} C(s, \varphi(s-\sigma+t)) \mathrm{d}s$$

关于 $t \in [\sigma, \sigma+A]$ 连续, 对 $\varphi \in W$, 取 $t = \sigma$ 有

$$\int_{-\infty}^{0} C(s, \varphi(s)) \mathrm{d}s < \infty.$$

由此知 $d(\cdot,\cdot)$ 有定义且它是一个 W 上的伪度量.

定理 4.6.5　$(W,(4.6.7))$ 满足 $(\mathcal{A}_1)$.

证明　方程 (4.6.7) 右端泛函 f 为

$$f(t,\varphi)=A(t,\varphi(0))+\int_{-\infty}^{0}C(s,\varphi(s))\mathrm{d}s.$$

因此如果 $\varphi\in W$, $p\in C_{\sigma,A}$ 有

$$\begin{aligned}f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))&=A(t,p(t))+\int_{-\infty}^{0}C(s,x_t^p(\sigma,\varphi)(s))\mathrm{d}s\\&=A(t,p(t))+\int_{-\infty}^{\sigma}C(s-t,\varphi(s-\sigma))\mathrm{d}s+\int_{\sigma}^{t}C(s-t,p(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因为 $\int_{-\infty}^{\sigma}C(s-t,\varphi(s-\sigma))\mathrm{d}s$ 关于 t 连续, 故 $(\mathcal{A}_1)$ 成立. ∎

定理 4.6.6　如果存在连续函数 $L,K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, 使得

$$|A(t,x)-A(t,y)|\leqslant L(t)|x-y|,$$

$$|C(t,x)-C(t,y)|\leqslant K(t)|x-y|,$$

则对 $(W,(4.6.7))$, $(\mathcal{A}_3)$ 成立.

证明　对任意 $\varphi\in W$ 和 $p,q\in C_{\sigma,A}$ 有

$$\begin{aligned}|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^q(\sigma,\varphi))|&\leqslant|A(t,p(t))-A(t,q(t))|\\&\quad+\int_{\sigma}^{t}|C(s-t,p(s))-C(s-t,q(s))|\mathrm{d}s\\&\leqslant L(t)|p(t)-q(t)|+\int_{\sigma}^{t}K(s-t)|p(s)-q(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant\left[L(t)+\int_{\sigma}^{t}K(s-t)\mathrm{d}s\right]|p-q|^{[\sigma,t]}.\end{aligned}$$

因此, $(\mathcal{A}_3)$ 成立. ∎

例 4.6.2　下面的初值问题:

$$x'(t)=x(t)+\int_{-\infty}^{t}\sin(s-t+x(s))^2\mathrm{d}s,\quad x_0=a,\ a\leqslant 0\tag{4.6.8}$$

至少有一个解.

注意到

$$\int_{-\infty}^{0} C(s-t,s)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{0}\sin(2s-t)^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-t}\sin s^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}-\int_{-t}^{0}\sin s^2\mathrm{d}s\right),$$

这说明 $a\in W$. 由定理 4.6.5 和定理 4.5.1 知方程 (4.6.8) 至少有一个解.

第 5 章　可变时滞泛函微分方程的局部理论

本章考虑时滞变化的泛函微分方程

$$x'(t) = f(t, x(s) : \alpha(t) \leqslant s \leqslant t). \tag{5.0.1}$$

许多学者对 (5.0.1) 的某些类型的基本理论作了深入而广泛的研究 [42, 61, 72, 123]. 然而几乎所有的工作都是把

$$x(s) : \alpha(t) \leqslant s \leqslant t$$

通过平移的方法化成

$$x_t(\theta) = x(t+\theta),$$

然后再进行研究. 这样, 就带来了一些其他的附加要求, 如一般都要求 x_t 关于相应的度量是连续的. 当 $\alpha(t) = -\infty$ 时, 这是较强的条件. 例如, 常见的 BC 空间就不满足这个条件. 本章采用与第 4 章不同的方法避免了这一要求. 在初始函数空间为拓扑空间或度量空间的情况下, 给出方程 (5.0.1) 的解的存在性、唯一性、解对初值的连续相依性及延展性定理, 并讨论 $\alpha(t)$ 不连续的情况. 最后作为应用, 考虑具有脉冲的泛函微分方程的基本理论问题.

5.1　预 备 知 识

定义 5.1.1　*设 A 为任意非空集合, 若存在规则 Φ, 对 A 中任意元素 a 都对应一个集合 $\Phi(a)$, 则称所有有序对 $(a,b), a \in A,\ b \in \Phi(a)$, 构成的集合*

$$\{(a,b) | a \in A,\ b \in \Phi(a)\} := M(A, \Phi)$$

为 Φ 在 A 上的图像集合.

当 Φ 为 A 上的恒值映射时, 即对任意 $a \in A$ 有 $\Phi(a) \equiv B$ 时, 有

$$M(A, \Phi) = A \times B.$$

故图像集合是乘积集合概念的推广.

当 $A = \mathbb{R}$ 及对任意 $x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = \{y\}, y \in \mathbb{R}$ 时, $M(A, \Phi)$ 成为 $y = \Phi(x)$ 的函数图像.

为了研究方程 (5.0.1), 考虑特殊的图像集合. 设 $A = \mathbb{R}^+$, 对任意 $t \in A$ 令

$$\Phi(t)=B([\alpha(t),t],\mathbb{R}^n),$$

这里 $B([\alpha(t),t],\mathbb{R}^n)$ 表示由 $[\alpha(t),t]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 一类函数构成的集合, $\alpha(t)$ 定义在 $\mathbb{R}^+$ 上, $\alpha(t)\leqslant t,\alpha(t)\geqslant -\infty$. 把相应的图像集合简记为 M.

任取 $(t,\varphi)\in M$, 即 $\varphi\in\Phi(t)$, 令

$$\bar{\varphi}(\theta)=\begin{cases}\varphi(t), & \theta\geqslant t,\\ \varphi(\theta), & \alpha(t)\leqslant\theta\leqslant t,\\ \varphi(\alpha(t)), & \theta\leqslant\alpha(t).\end{cases}$$

显然有

引理 5.1.1 设 $\lambda\in\mathbb{R},\varphi,\psi\in\Phi(t)$, 则有

$$\overline{\lambda\varphi}=\lambda\bar{\varphi},\quad \overline{(\varphi+\psi)}=\bar{\varphi}+\bar{\psi}.$$

设 (B,ρ) 为度量空间, ρ 是 B 上的度量. 定义映射 $d:M\times M\to\mathbb{R}^+$ 如下:

$$d((t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2))=|t_1-t_2|+\rho(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2),\quad (t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2)\in M,$$

这里 $B=\{\bar{\varphi}|\varphi\in\Phi(t),\ t\in\mathbb{R}^+\}$. 容易证明以下引理:

引理 5.1.2 d 是 M 上的距离.

设 (B,Γ_B) 是拓扑空间, Γ_B 是 B 的拓扑, 记 $\Gamma_{\mathbb{R}^+}$ 为 $\mathbb{R}^+$ 上的通常拓扑, 设 (σ,φ) 为 M 中的任意点, v_σ 为 σ 在 $(\mathbb{R}^+,\Gamma_{\mathbb{R}^+})$ 中的某一邻域, w_p 为 $\bar{p}$ 在 (B,Γ_B) 中的某一邻域.

定义 5.1.2 称 M 中的集合

$$u_{((\sigma,\varphi))}(v_\sigma,w_\varphi)=\{(t,\psi)\in M|t\in v_\sigma,\bar{\psi}\in w_\varphi\}$$

为 (σ,φ) 在 M 中的一个邻域.

定义 5.1.3 由定义 5.1.2, 用标准的方法定义 M 上相应的拓扑称为 M 的图像拓扑, 记为 Γ_M, 称 (M,Γ_M) 为图像空间.

引理 5.1.3 设 $(\sigma_n,\varphi_n)\in M,\ n=0,1,2,\cdots$, 则

$$(\sigma_n,\varphi_n)\xrightarrow{\Gamma_M}(\sigma_0,\varphi_0),\quad n\to\infty$$

当且仅当

$$|\sigma_n-\sigma_0|\to 0,\quad \bar{\varphi}_n\xrightarrow{\Gamma_B}\bar{\varphi}_0,\ n\to\infty.$$

证明从略.

定义 5.1.4 设 Ω 是 M 中的开集, 称 $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 在 Ω 上满足局部 Lipschitz 条件, 若 $(t,\varphi),(t,\psi)\in D$, D 是 Ω 中的紧集且存在与 D 有关的常数 L_D, 使得

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\leqslant L_D|\bar{\varphi}-\bar{\psi}|^{\mathbb{R}},$$

其中

$$|p|^{\mathbb{R}} = \sup_{s\in\mathbb{R}} |p(s)|, \quad p \in B.$$

类似符号的意义依此类推.

定义 5.1.5　设 Ω 是 M 中的开集, 称 $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是几乎处处连续的, 如果 f 在 Ω 上除至多可列个点之外都是连续的, 记为 $f\in C_{\text{a.e}}(\Omega,\mathbb{R}^n)$; 若 f 还是有界的, 则记为 $f\in C^0_{\text{a.e}}(\Omega,\mathbb{R}^n)$; 若 f 在 Ω 是连续的, 则记为 $f\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

设 $[\alpha(t),t]\subset(a,b)$, $x:(a,b)\to\mathbb{R}^n$. 把 $x(s):s\in[\alpha(t),t]$ 记为 x^t, 即 x^t 表示 x 在 $[\alpha(t),t]$ 上的限制.

引理 5.1.4　设 φ,ψ 的定义域相同且 φ^t,ψ^t 有意义, 又 $a,b\in\mathbb{R}$, 则有

$$(a\varphi+b\psi)^t = a\varphi^t + b\psi^t.$$

证明从略.

定义 5.1.6 设 $f\in C_{\text{a.e}}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $(\sigma,\varphi)\in\Omega$, 若存在 $x\in C([\alpha(\sigma),\sigma+h],\mathbb{R}^n)$, $h>0$ 且 x 在 $[\sigma,\sigma+h]$ 上全连续, 并几乎处处满足方程 (5.0.1), 又 $x^\sigma=\varphi$, 则称 x 是 FDE(f)(即方程 (5.0.1)) 的过 (σ,φ) 的解.

为使 FDE(f) 具有过 (σ,φ) 的解, 显然在 σ 的某一右邻域内应有 $\alpha(\sigma)\leqslant\alpha(t)$, 下面总设此条件成立.

方程 (5.0.1) 的初值问题可以写成

$$\begin{cases} x' = f(t,x^t), \\ x^\sigma = \varphi. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

引理 5.1.5　方程 (5.1.1) 与积分方程

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(\sigma) + \displaystyle\int_\sigma^t f(s,x^s)\mathrm{d}s, \\ x^\sigma = \varphi \end{cases} \tag{5.1.2}$$

等价.

5.2　时滞连续变化系统的基本理论

本节总设 $\alpha(t)$ 是连续的, B 为连续函数空间, Γ^* 为 B 的一致收敛拓扑, 并设 (B,Γ_B) 满足

(a_1) Γ^* 强于 Γ_B;

(a_2) (B,Γ_B) 满足第二可列公理;

(a_3) 设 $\Delta\subset\mathbb{R}$ 为任一有限区间且 $\varphi_n\in B$, $n=0,1,2,\cdots$, 由 $\varphi_n\xrightarrow{\Gamma_B}\varphi_0$, $n\to\infty$, 可推得 $|\varphi_n-\varphi_0|^{\Delta}\to 0$, $n\to\infty$;

(a_4) B 中的加法运算对 Γ_B 是连续的.

引理 5.2.1 若 $p:[a,c]\to\mathbb{R}^n$ 且

$$p(t)=\begin{cases}p_1(t), & t\in[a,b],\\ p_2(t), & t\in[b,c],\end{cases}$$

则

$$\bar{p}=\bar{p}_1+\bar{p}_2-\overline{p_1(b)},$$

其中,

$$\overline{p_1(b)(t)}\equiv p_1(b),\quad t\in\mathbb{R}.$$

证明从略.

引理 5.2.2 若 (a_2) 成立, 则 (M,Γ_M) 满足第二可列公理.

证明从略.

任取 $(t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2)\in M$. 定义 $d^*:M\times M\to\mathbb{R}^+$ 如下:

$$d^*((t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2))=|t_1-t_2|+|\bar{\varphi}_1-\bar{\varphi}_2|^{\mathbb{R}}.$$

d^* 在 M 上的诱导拓扑就是 $(\mathbb{R}^+,\Gamma_{\mathbb{R}^+})$ 和 (B,Γ^*) 生成的拓扑, 记此拓扑为 Γ_M^*.

引理 5.2.3 若 (a_1) 成立, 设 A 为 M 中的 Γ_M 开 (闭) 集, 则 A 为 d^* 开 (闭) 集的子集.

引理 5.2.4 若 (a_1) 成立, 设 Ω 是 M 中的开集, W 是 Ω 的紧子集, 则存在 $h_1>0$, 使得对任意 $(\sigma,\varphi)\in W$, 集合

$$N=\{(t,\psi)\in M|t\in[\sigma,\sigma+h_1],|\bar{\varphi}-\bar{\psi}|^{\mathbb{R}}\leqslant h_1\}\subset\Omega.$$

证明 设 Ω 的余集为 Ω^c, 则 Ω^c 和 W 均是 Γ_M 闭集, 由引理 5.2.3 知它们都是 d^* 闭集的子集, 因 $\Omega^c\cap W=\varnothing$, 故

$$d^*(\Omega^c,W)=2r>0.$$

取 $h_1<r$, 对任意 $(t,\psi)\in N$ 有

$$d^*(W,(t,\psi))\leqslant 2h_1,$$

故有

$$d^*(\Omega^c,(t,\psi))\geqslant d^*(\Omega^c,W)-d^*(W,(t,\psi))\geqslant 2r-2h_1>0.$$

由此推得 $(t,\psi)\in\Omega$, 因而 $N\subset\Omega$. ∎

引理 5.2.5　若 (a_1) 成立, 设 $f \in C^0_{\mathrm{a.e.}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, 其中, Ω 是 M 中的开集, 若

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(\sigma) + \int_\sigma^t f(s, x^s)\mathrm{d}s, & t \in [\sigma, \sigma + h_1], \\ \varphi(t), & t \in [\alpha(\sigma), \sigma], \end{cases}$$

这里 $h_1 > 0$ 由引理 5.2.4 定义, 则对任意 $x \in C([\alpha(\sigma), \sigma + h_1], \mathbb{R}^n)$, 存在 $0 < h \leqslant h_1$, 使得对任意 $t \in [\sigma, \sigma + h]$ 有

$$|\bar{g^t} - \bar{\varphi}|^{\mathbb{R}} \leqslant h_1.$$

证明　设对任意 $(t, \psi) \in \Omega$ 有 $|f(t, \psi)| \leqslant M_1$.

若 $\alpha(\sigma) = -\infty$, 则由 $\alpha(t)$ 的连续性, 只要取 $h \leqslant \min\{h_1/M_1, h_1\}$ 充分小, 就可使得

$$|\bar{g^t} - \bar{\varphi}|^{\mathbb{R}} \leqslant h_1.$$

若 $\alpha(\sigma) > -\infty$, 因 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha(\sigma), \sigma]$ 上一致连续, 故存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $t', t'' \in [\alpha(\sigma), \sigma]$, 只要 $|t' - t''| < \delta$ 就有

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{h_1}{2}.$$

再由 $\alpha(t)$ 的连续性知存在 $\delta_1 > 0$, 使得对任意 $t_1, t_2 \in [\sigma, \sigma + \delta_1]$ 有 $\alpha(t_1), \alpha(t_2) \in [\alpha(\sigma), \sigma]$ 且

$$|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| \leqslant \delta.$$

取 $h \leqslant \min\{\delta_1, h_1, h_1/2M\}$ 即可使

$$|\bar{g^t} - \bar{\varphi}|^{\mathbb{R}} \leqslant h_1. \qquad \blacksquare$$

定理 5.2.1　设 (a_1) 成立, Ω 是 M 中的开集, $\alpha(t)$ 连续, $f \in C^0_{\mathrm{a.e}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, 则 $\mathrm{FDE}(f)$ 存在过 (σ, φ) 的解.

证明　设 h_1 定义如引理 5.2.4, h, M_1 定义如引理 5.2.5. 考虑 $C([\sigma, \sigma + h], \mathbb{R}^n) := C_1$ 的子集

$$K = \{\psi \in C_1 | \psi(\sigma) = \varphi(\sigma),\ |\bar{x}^s_{(\psi)} - \bar{\varphi}|^{\mathbb{R}} \leqslant h_1,$$
$$|\psi(s') - \psi(s'')| \leqslant M_1|s' - s''|,\quad s, s', s'' \in [\sigma, \sigma + h]\},$$

其中,

$$x_{(\psi)}(\theta) = \begin{cases} \psi(\theta), & \theta \in [\sigma, \sigma + h], \\ \varphi(\theta), & \theta \in [\alpha(\sigma), \sigma]. \end{cases}$$

由引理 5.2.5 知 $K \neq \varnothing$. 设 $\psi_1, \psi_2 \in K, t_1, t_2 \geqslant 0, t_1 + t_2 = 1$, 易知

$$x_{(t_1\psi_1+t_2\psi_2)}=t_1x_{(\psi_1)}+t_2x_{(\psi_2)}.$$

再由引理 5.1.1 和引理 5.1.4 有

$$|\bar{x}^s_{(t_1\psi_1+t_2\psi_2)}-\bar{\varphi}|^{\mathbb{R}}\leqslant h_1,$$

故 K 是 C_1 中的凸集. 定义映射 $T:K\to C_1$ 如下:

$$(T\psi)(t)=\varphi(\sigma)+\int_\sigma^t f(s,x^s_{(\psi)})\mathrm{d}s,\quad t\in[\sigma,\sigma+h],\psi\in K.$$

由引理 5.2.4 和引理 5.2.5 易知 T 是映 K 到自身的映射.

以下证 T 在 K 上按一致收敛拓扑是连续的. 设 $\psi_k,\psi\in K$ 且

$$|\psi_k-\psi|^{[\sigma,\sigma+h]}\to 0,\quad k\to\infty.$$

故

$$|\bar{\psi}_k-\bar{\psi}|^{\mathbb{R}}\to 0,\quad k\to\infty.$$

由 (a_1) 知 $\bar{\psi}_k\xrightarrow{\Gamma_B}\bar{\psi},\ \ k\to\infty$. 对固定的 $s\in[\sigma,\sigma+h]$, 显然有

$$\bar{x}^s_{(\psi_k)}\xrightarrow{\Gamma_B}\bar{x}^s_{(\psi)},\quad k\to\infty$$

以及

$$(s,x^s_{(\psi_k)})\xrightarrow{\Gamma_M}(s,x^s_{(\psi)}),\quad k\to\infty.$$

因为 $f\in C^0_{\mathrm{a.e.}}(\Omega,\mathbb{R}^n)$, 故由控制收敛定理有

$$\lim_{t\to\infty}|T\psi_k-T\psi|^{[\sigma,\sigma+h]}\leqslant\lim_{k\to\infty}\int_\sigma^{\sigma+h}|f(s,x^s_{(\psi_k)})-f(s,x^s_{(\psi)})|\mathrm{d}s=0.$$

故 T 按一致收敛拓扑是连续的.

又易知 TK 一致有界且等度连续, 故 TK 按一致收敛拓扑是相对紧的. 由 Schauder 不动点定理知 T 在 K 上有不动点存在, 设为 $y(t)$, 易知

$$x(t)=\begin{cases}y(t), & t\in[\sigma,\sigma+h],\\ \varphi(t), & t\in[\alpha(\sigma),\sigma],\end{cases}$$

即为方程 (5.1.2) 的解. 由引理 5.1.5 知它也是 FDE(f) 过点 (σ,φ) 的解. ∎

定理 5.2.2 设 $(\mathrm{a}_1),(\mathrm{a}_2)$ 成立, f 连续且在 M 的开集 Ω 上满足局部 Lipschitz 条件, $(\sigma,\varphi)\in\Omega$, 则 FDE$(f)$ 过 (σ,φ) 的解是唯一的.

证明　设 $x_1(t), x_2(t)$, $t \in [\alpha(\sigma), \sigma+h]$ 都是 FDE(f) 过 (σ, φ) 的解, 易知集合

$$\{\bar{x}_1^s,\ \bar{x}_2^s |\ s \in [\sigma, \sigma+h]\}$$

按 Γ^* 是相对紧的, 由 (a_1) 知其按 Γ_B 是列紧的, 再由 (a_2) 知其也是 Γ_B 相对紧的, 从而在 Ω 中, 集合

$$\{(s, x_1^s), (s, x_2^s) | s \in [\sigma, \sigma+h]\}$$

是 Γ_M 相对紧的, 因而存在 Ω 中的 Γ_M 紧集 D 包含上述集合. 设相应的 Lipschitz 常数为 L_D, 则有

$$\begin{aligned}|x_1(t) - x_2(t)| &\leqslant \int_\sigma^t |f(s, x_1^s) - f(s, x_2^s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant hL_D \sup_{\sigma \leqslant s \leqslant t} |\bar{x}_1^s - \bar{x}_2^s|^R \\ &\leqslant hL_D |x_1 - x_2|^{[\sigma, t]} \\ &= hL_D \sup_{\sigma \leqslant \theta \leqslant t} |x_1(\theta) - x_2(\theta)|.\end{aligned}$$

取 $h > 0$ 使 $hL_D < 1$, 则由上式有

$$\sup_{\sigma \leqslant \theta \leqslant t} |x_1(\theta) - x_2(\theta)| = 0,$$

即 $x_1(\theta) \equiv x_2(\theta)$, 由此唯一性得证. ∎

引理 5.2.6　*设 W 是 M 中的 Γ_M 紧集, 则集合*

$$W_1 = \{\bar{\varphi} |\ \text{存在 } t,\ \text{使得}(t, \varphi) \in W\}$$

是 B 中的 Γ_B 紧集.

证明从略.

引理 5.2.7　*设 W 是 M 中的 Γ_M 紧集, 则集合*

$$W_2 = \{t |\ \text{存在}\, \varphi,\ \text{使得}\, (t, \varphi) \in W\}$$

是 $\mathbb{R}^+$ 中的 $\Gamma_{\mathbb{R}^+}$ 紧集.

证明从略.

引理 5.2.8　*设 $(\mathrm{a}_2), (\mathrm{a}_3)$ 成立, W, W_1 的定义如引理 5.2.6, $(t_0, \varphi_0) \in W$, $\alpha(t_0) > -\infty$, 则对任意 $h_1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $\theta', \theta'' \in [\alpha(t_0), t_0]$, 只要 $|\theta' - \theta''| < \delta$ 就有 $|\bar{\varphi}_0(\theta') - \bar{\varphi}_0(\theta'')| < h_1$ 且 δ 与 (t_0, φ_0) 的选取无关.*

证明　若结论不真, 则对 $\delta = 1/n$, 存在 $(t_n, \varphi_n) \in W$ 及 $\theta_n', \theta_n'' \in [\alpha(t_n), t_n]$, 使得 $|\theta_n' - \theta_n''| < 1/n$, 但

$$|\bar{\varphi}_n(\theta_n') - \bar{\varphi}_n(\theta_n'')| \geqslant h_1.$$

因 W 是 Γ_M 紧集, 由引理 5.2.7 知 W_2 是 $\Gamma_{\mathbb{R}^+}$ 紧集, 故 $\alpha(t)$ 在 W_2 上取得有限的极大值和极小值, 从而 $\{\theta_n'\}$ 和 $\{\theta_n''\}$ 都是有界的, 因而存在收敛子列, 不妨均设为其本身. 设

$$|\theta_n' - \theta_0| \to 0,\ |\theta_n'' - \theta_0| \to 0, \quad n \to +\infty$$

且有

$$|\bar{\varphi}_n(\theta_n') - \bar{\varphi}_n(\theta_n'')| \geqslant h_1.$$

由引理 5.2.6 及 (a_2) 知 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 存在 Γ_B 收敛子列, 不妨设为其本身. 设

$$\bar{\varphi}_n \xrightarrow{\Gamma_B} \bar{\varphi}_0, \quad n \to \infty,$$

再由 (a_3) 知 $\{\bar{\varphi}_n\}$ 在 W_2 上是一致收敛的, 故有

$$\begin{aligned}|\bar{\varphi}_n(\theta_n') - \bar{\varphi}_n(\theta_n'')| \leqslant & |\bar{\varphi}_n(\theta_n') - \bar{\varphi}_0(\theta_n')| + |\bar{\varphi}_0(\theta_n') - \bar{\varphi}_0(\theta_0)| \\ & + |\bar{\varphi}_0(\theta_0) - \bar{\varphi}_0(\theta_n'')| + |\bar{\varphi}_0(\theta_n'') - \bar{\varphi}_n(\theta_n'')| \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

这个矛盾证明了此引理. ∎

定义 5.2.1 设 $f \in C^0_{\rm a.e}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 定义

$$|f|^{\Omega} = \sup_{(t,\varphi)\in\Omega} |f(t,\varphi)|.$$

显然 $(C^0_{\rm a.e.}(\Omega, \mathbb{R}^n), |\cdot|^{\Omega})$ 为赋范线性空间.

定理 5.2.3 设 Ω 是 M 中的开集, W 是 Ω 中的紧集, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 则必存在 W 的一个 Γ_M 邻域 $V \subset \Omega$ 和 f^0 的一个 $|\cdot|^V$ 邻域 $U(f^0) \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ 以及数 $h > 0$, 使得当 $f \in U(f^0)$, $(\sigma, \varphi) \in V$ 时, FDE(f) 存在过 (σ, φ) 的解 $x(t), t \in [\alpha(\sigma), \sigma + h]$.

证明 设 $(\sigma, \varphi) \in W$,

$$U(\sigma, \varphi) = \{(t, \psi) \in \Omega \,|\, |f^0(t, \psi) - f^0(\sigma, \varphi)| < 1,\ |t - \sigma| < 1\}.$$

易知 $U(\sigma, \varphi)$ 是 Γ_M 开集且 $U(\sigma, \varphi) \in \Omega$. 设

$$V_1 = \bigcup_{(\sigma,\varphi)\in W} U(\sigma, \varphi),$$

则 V_1 是 Γ_M 开集. 设

$$W_2 = \{t \,|\, \text{存在 } \varphi, \text{使}(t, \varphi) \in V_1\},$$

则由 V_1 的构造及引理 5.2.7 易知存在一有限闭区间 Δ, 使得 $W_2 \subset \Delta$. 又显然 $W \subset V_1$ 且 $d^*(W, V_1^c) = 2r > 0$, 设

$$V_2 = \{(t, \psi) \in M \,|\, d^*((t, \psi), W) \leqslant r\},$$

则

$$d^*(V_2, V_1^c) = r_1 > 0.$$

由此可证存在 $h_1 > 0$, 使得对任意 $(\sigma, \varphi) \in V_2$, 集合

$$N = \{(t, \psi) \in M | t \in [\sigma, \sigma + h_1], |\bar{\varphi} - \bar{\psi}|^{\mathbb{R}} \leqslant h_1\} \subset V_1.$$

取 $V = V_2$, 因而 $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$. 设存在 $M_1 > 0$, 使得当 $(t, \varphi) \in V$ 时有

$$|f^0(t, \varphi)| \leqslant M_1.$$

设 $U(f^0)$ 为 $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ 中以 f^0 为中心的单位球,

$$U(f^0) = \{f \in C^0(V, \mathbb{R}^n) | \ |f - f^0|^V < 1\},$$

于是对任意 $(t, \psi) \in V$ 和任意 $f \in U(f^0)$ 有

$$|f(t, \psi)| \leqslant M_1 + 1 := M_2.$$

任取 $x \in C([\alpha(\sigma), t_0 + h_1], \mathbb{R}^n)$, 设

$$g(t) = \begin{cases} \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x^s) \mathrm{d}s, & t \in [t_0, t_0 + h_1], \\ \varphi_0(t), & t \in [\alpha(t_0), t_0]. \end{cases}$$

以下证存在与 f, (t_0, φ_0) 及 x 的选取无关的 $h : 0 < h \leqslant h_1$, 使得对任意 $t \in [t_0, t_0 + h]$ 有

$$|\bar{g^t} - \bar{\varphi_0}|^{\mathbb{R}} \leqslant h_1,$$

对任意 $t_1 \in [t_0, t_0 + h_1]$ 有

$$|g(t_1) - g(t_0)| = |g(t_1) - \varphi(t_0)| \leqslant M_2 |t_1 - t_0|.$$

若 $\alpha(t_0) = -\infty$, 取 $h \leqslant h_1/M_2$ 即可.

若 $\alpha(t_0) > -\infty$, 则由引理 5.2.8 知对任意 $\varphi_0 \in W_1$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\theta', \theta'' \in [\alpha(t_0), t_0]$ 且 $|\theta' - \theta''| < \delta$ 时有

$$|\varphi_0(\theta') - \varphi_0(\theta'')| < \frac{h_1}{2}.$$

再由 $\alpha(t)$ 的连续性知存在 $\delta_1 > 0$, 使得对任意 $t', t'' \in \Delta$, $|t' - t''| < \delta_1$ 有

$$|\alpha(t') - \alpha(t'')| < \delta,$$

故只要取 $h \leqslant \min\{\delta_1, h_1/2M_2, h_1\}$ 即可满足要求. 于是由定理 5.2.1 的证明可知 FDE(f) 在 $[\alpha(t_0), t_0 + h]$ 上存在过 (t_0, φ_0) 的解. ∎

推论 5.2.1 设 Ω, W 定义如前, $f^0 \in C_{\text{a.e}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 且存在 W 的邻域 $V_1 \subset \Omega$, 使得 $f^0 \in C^0_{\text{a.e}}(V_1, \mathbb{R}^n)$, 则必存在 W 的一个邻域 $V \subset V_1$ 和 f^0 的一个邻域 $U(f_0) \subset C^0_{\text{a.e}}(V_1, \mathbb{R}^n)$ 以及数 $h > 0$, 使得当 $f \in U(f^0)$, $(\sigma, \varphi) \in V$ 时, FDE(f) 在 $[\alpha(\sigma), \sigma+h]$ 上存在过 (σ, φ) 的解.

证明从略.

引理 5.2.9 设 $(\sigma_0, \varphi_0) \in \Omega$, $f^0 \in C_{\text{a.e.}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 又 FDE($f^0$) 过 (σ_0, φ_0) 在 $[\alpha(\sigma_0), b](b > \sigma_0)$ 上存在唯一解 $x_0(t)$, 则集合

$$W_0 = \{(t, x_0^t) | t \in [\sigma_0, b]\}$$

是 Ω 的 Γ_M 紧集.

证明从略.

引理 5.2.10 设 $p_n : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ 且 $(\text{a}_1), (\text{a}_4)$ 成立, 令

$$p_n(t) = \begin{cases} \psi_n(t), & t \in [b, c], \\ \varphi_n(t), & t \in [a, b], n = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

若

$$\bar{p}_n \xrightarrow{\Gamma_B} \bar{p}_0, \quad |\psi_n - \psi_0|^{[b,c]} \to 0, \quad n \to \infty,$$

则

$$\bar{\varphi}_n \xrightarrow{\Gamma_B} \bar{\varphi}_0, \quad n \to \infty.$$

证明从略.

定理 5.2.4 设 $(\text{a}_1) \sim (\text{a}_4)$ 成立. Ω 是 M 中的开集, $(\sigma_0, \varphi_0) \in \Omega$, $f^0 \in C_{\text{a.e.}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $x_0(t)$ 和 W_0 定义如引理 5.2.9. 若存在 W_0 的邻域 $V^0 \subset \Omega$, 使得 $f^0 \in C^0_{\text{a.e.}}(V^0, \mathbb{R}^n)$, 又

$$(\sigma_i, \varphi_i) \in \Omega, \quad f^i \in C^0_{\text{a.e.}}(V^0, \mathbb{R}^n), \quad i = 1, 2, \cdots$$

且满足

$$(\sigma_i, \varphi_i) \xrightarrow{\Gamma_M} (\sigma_0, \varphi_0), \ |f^i - f^0|^{V^0} \to 0, \quad i \to \infty,$$

则当 i 充分大时, FDE(f^i) 必存在过 (σ_i, φ_i) 的解 $x_i(t)$ 定义在 $[\alpha(\sigma_i), b]$ 上, 且对任意 $a : \sigma_0 < a < b$, 在 $[a, b]$ 上一致地有

$$x_i(t) \to x_0(t), \quad i \to \infty.$$

证明 显然 V^0 是 (σ_0, φ_0) 的邻域, 故存在 $N \geqslant 0$, 当 $i \geqslant N$ 时有 $(\sigma_i, \varphi_i) \in V^0$. 取

$$W = W^0 \cup \{(\sigma_i, \varphi_i) | i \geqslant N\},$$

则 $W \subset V^0 \subset \Omega$. 易知 W 是 Γ_M 紧集. 由推论 5.2.1 知必存在 W 的一个邻域 $V \subset V^0$ 和 f^0 的一个邻域 U 以及常数 $h > 0$, 使对任意 $(\sigma, \varphi) \in V$ 及任意 $f \in U$, FDE(f) 过 (σ, φ) 在 $[\alpha(\sigma), \sigma + h]$ 上存在一个解 $x(\sigma, \varphi, f)(t)$.

由于 $V \subset V^0$, 故有 $f^i \in C^0_{\text{a.e.}}(V, \mathbb{R}^n)$, 使当 i 充分大时, FDE(f^i) 过 (σ_i, φ_i) 存在解

$$x_i(t) = x(\sigma_i, \varphi_i, f^i)(t)$$

定义在 $[\alpha(\sigma_i), \sigma_i + h]$ 上且

$$x_i(t) = \begin{cases} \varphi_i(\sigma_i) + \int_{\sigma_i}^{t} f^i(s, x_i^s)\mathrm{d}s, & t \in [\sigma_i, \sigma_i + h], \\ \varphi_i(t), & t \in [\alpha(\sigma_i), \sigma_i]. \end{cases}$$

由定理 5.2.3 的证明知存在 $h_1 > 0$, 使对 $(\sigma, \varphi) \in V$, $(t, \psi) \in M$, 只要 $t \in [\sigma, \sigma + h_1]$, $|\bar{\psi} - \bar{\varphi}|^{\mathbb{R}} \leqslant h_1$ 就有 $(t, \psi) \in V^0$.

如果 $\sigma_0 + h_1 \leqslant b$, 证明在 $[\sigma_0 + \varepsilon, \sigma_0 + h_1 - \varepsilon], 2\varepsilon < h_1$ 上, $\{x_i(t)\}$ 一致收敛于 $x_0(t)$. 显然 $\{x_i(t)\}$ 一致有界且等度连续, 故存在收敛子列 $\{x_{i_j}\}$ 在 $[\sigma_0+\varepsilon, \sigma_0+h_1-\varepsilon]$ 上一致收敛于 $x_*(t)$.

记

$$\psi_i(t) = \int_{\sigma_i}^{t} f^i(s, x_i^s)\mathrm{d}s, \quad t \in [\sigma_i, \sigma_0 + h_1 - \varepsilon],$$

则在 $[\alpha(\sigma_i), \sigma_0 + h_1 - \varepsilon]$ 上, 由引理 5.2.1 有

$$x_i(t) = \begin{cases} \varphi_i(\sigma_i) + \psi_i(t), & t \in [\sigma_i, \sigma_0 + h_1 - \varepsilon], \\ \varphi_i(t), & t \in [\alpha(\sigma_i), \sigma_i] \end{cases}$$

及 $\bar{x}_i = \bar{\psi}_i + \bar{\varphi}_i$. 易证

$$|\bar{\psi}_{i_j} - \bar{\psi}_*|^{\mathbb{R}} \to 0, \quad j \to \infty,$$

这里 $\psi_* = x_* - \varphi_0(\sigma_0)$. 由 (a_1) 有

$$\bar{\psi}_{i_j} \xrightarrow{\Gamma_B} \bar{\psi}_*, \quad j \to \infty,$$

再由 (a_4) 有

$$\bar{x}_{i_j} \xrightarrow{\Gamma_B} \bar{\varphi}_0 + \bar{\psi}_*, \quad j \to \infty.$$

下面仍用 x_* 来表示函数

$$x_*(t) = \begin{cases} \varphi_0(\sigma_0) + \psi_*(t), & t \in [\sigma_0, \sigma_0 + h_1 - \varepsilon], \\ \varphi_0(t), & t \in [\alpha(\sigma_0), \sigma_0], \end{cases}$$

则由引理 5.2.10 推得

$$x_{i_j}^s \xrightarrow{\Gamma_B} x_*^s, \quad j \to \infty,$$

从而有

$$(s, x_{i_j}^s) \xrightarrow{\Gamma_M} (s, x_*^s), \quad j \to \infty.$$

由控制收敛定理有

$$x_*(t) = \varphi_0(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{t} f^0(s, x_*^s)\mathrm{d}s, \quad t \in [\sigma_0 + \varepsilon, \sigma_0 + h_1 - \varepsilon].$$

因为 FDE(f^0) 过 (σ_0, φ_0) 的解是唯一的, 故推得 $\{x_i\}$ 在 $[\sigma_0 + \varepsilon, \sigma_0 + h_1 - \varepsilon]$ 上一致收敛于 x_0.

取 $t_i = \sigma_i + h_1 - \varepsilon$, $\psi_i = x_i^{t_i}$, $i = 1, 2, \cdots$, 显然 $(t_0, \varphi_0) \in V$. 由上面的证明知

$$t_i \to t_0, \ \bar{\psi}_i \xrightarrow{\Gamma_B} \bar{\psi}_0, \quad i \to \infty.$$

故当 i 充分大时, $(t_i, \psi_i) \in V^0$ 且

$$(t_i, \psi_i) \xrightarrow{\Gamma_M} (t_0, \psi_0), \quad i \to \infty.$$

若 $t_0 + h_1 < b$, 即 $\sigma_0 + 2h_1 - \varepsilon < b$, 则重复前面的证明可证得当 i 充分大时, $x(t_i, \psi_i, f^i)(t)$ 在 $[\alpha(t_i), t_0 + 2h_1 - \varepsilon]$ 上有定义, 即 $x_i(t)$ 在 $[\alpha(\sigma_i), \sigma_i + 2(h - \varepsilon)]$ 上有定义, 用类似的方法可证明 $\{x_i(t)\}$ 在 $[\alpha(t_0) + \varepsilon, b]$ 上一致收敛于 $x_0(t)$. ■

推论 5.2.2 若定理 5.2.4 的条件成立, 则 $x_i(t)$ 在 $[\alpha(\sigma_i), b]$ 上存在且有

$$\bar{x}_i \xrightarrow{\Gamma_B} \bar{x}_0, \quad i \to \infty.$$

证明从略.

定理 5.2.5 设 $(\mathrm{a}_1) \sim (\mathrm{a}_4)$ 成立, Ω 是 M 中的开集. $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 则 FDE($f$) 定义在 $[\alpha(\sigma), b)$ 上的解 $x(t)$ 是右行饱和解, 当且仅当若存在 $t_n \to b^-$ 及 $\varphi \in C([\alpha(b), b], \mathbb{R}^n)$, 使得当

$$(t_n, x^{t_n}) \xrightarrow{\Gamma_M} (b, \varphi), \quad n \to \infty$$

时, 必有 $(b, \varphi) \in \partial\Omega$.

证明 先证必要性. 如果存在 $t_n \to b^-$, $n \to \infty$ 及 $\varphi \in C([\alpha(b), b], \mathbb{R}^n)$, 使得对 FDE($f$) 的饱和解 $x(t)$ 有

$$(t_n, x^{t_n}) \xrightarrow{\Gamma_M} (b, \varphi), \quad n \to \infty,$$

而 $(b, \varphi) \in \Omega$, 则由定理 5.2.3 知必存在 $h > 0$ 及 (b, φ) 的一个邻域 $V \subset \Omega$, 使得 FDE(f) 的过 (σ, φ) 的解都至少在 $[\alpha(\sigma), \sigma + h]$ 上有定义. 当 n 充分大时, $(t_n, x^{t_n}) \in$

V, 于是 FDE(f) 过 (t_n, x^{t_n}) 的解至少在 $[\alpha(\sigma), t_n + h]$ 上存在, 因而 $x(t)$ 至少在 $[\alpha(\sigma), t_n + h]$ 上存在. 但当 n 充分大时, $t_n + h > b$, 这与 $x(t)$ 是 $[\alpha(\sigma), b)$ 上的饱和解相矛盾, 故有 $(b, \varphi) \in \partial\Omega$.

再证充分性. 设存在 $t_n \to b^-$, $n \to \infty$ 及 $\varphi \in C([\alpha(b), b], \mathbb{R}^n)$, 使得

$$(t_n, x^{t_n}) \xrightarrow{\Gamma_M} (b, \varphi), \quad n \to \infty$$

且 $(b, \varphi) \in \partial\Omega$, 但 $x(t)$, $t \in [\alpha(\sigma), b)$ 不是右行饱和解, 则必有

$$(t, x^t) \xrightarrow{\Gamma_M} (b, x^b), \quad t \to b^-,$$

但 $(b, x^b) \in \Omega$, 这与 $(b, x^b) = (b, \varphi) \in \partial\Omega$ 矛盾, 故 $x(t)$ 必为饱和解. ∎

5.3 时滞不连续变化系统的基本理论

文献 [189] 指出, 从已有的工作来看, 总要求时滞的变化是连续的, 但在许多实际问题的研究中, 经常遇到时滞不连续变化的系统. 本节利用 5.1 节和 5.2 节的概念和方法建立时滞不连续变化系统的基本理论.

设 $\alpha(t)$ 是几乎处处连续的, 仍设 B 为连续函数空间, ρ 为 B 的度量, 并假定下列条件满足:

(b_1) 存在常数 $Q > 0$, 使得对任意 $\varphi, \psi \in B$ 有 $\rho(\varphi, \psi) \leqslant Q|\varphi - \psi|^{\mathbb{R}}$;

(b_2) 设 $\Delta \subset \mathbb{R}$ 为任一有限区间且 $\varphi_n \in B$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 则由

$$\rho(\varphi_n, \varphi_0) \to 0, \quad n \to \infty$$

可推得

$$|\varphi_n - \varphi_0|^{\Delta} \to 0, \quad n \to \infty;$$

(b_3) B 中的加法关于 ρ 是连续的.

类似前面可以定义 M 上的度量 d. 显然 5.1 节的各引理仍成立.

定理 5.3.1 设 (b_1) 成立, $f \in C_{\mathrm{a.e}}(M, \mathbb{R}^n)$ 且当 $t \in [\sigma, \sigma + h], h > 0$ 时有

$$|f(t, \psi)| \leqslant M_1, \quad (t, \psi) \in M,$$

则 FDE(f) 在 $[\alpha(\sigma), \sigma + h]$ 上存在过 $(\sigma, \varphi) \in M$ 的一个解.

证明 考虑 $C([\sigma, \sigma + h], \mathbb{R}^n) := C_1$ 的子集

$$\begin{aligned} K = &\{\psi \in C_1 | \psi(\sigma) = \varphi(\sigma), |\psi(s') - \psi(s'')| \leqslant M_1 |s' - s''|, \\ &s', s'' \in [\sigma, \sigma + h]\}. \end{aligned}$$

显然 K 是 C_1 中的非空凸集.

类似定理 5.2.1 的证明定义 $x_{(\psi)}$ 和映射 T, 易证 T 是 K 到 K 上的映射.

当 ψ 给定后, $x_{(\psi)}$ 是连续函数, 因 f 是几乎处处连续的, $\alpha(t)$ 也是几乎处处连续的, 故 $f(s, x^s_{(\psi)})$ 是 s 的几乎处处连续函数. 用和定理 5.2.1 类似的方法可证 T 按一致收敛拓扑是连续的, TK 按一致收敛拓扑是相对紧的, 由 Schauder 不动点定理即证得本定理. ∎

定理 5.3.2 设定理 5.3.1 的条件成立且 f 在 M 上满足局部 Lipschitz 条件, 则 FDE(f) 过 $(\sigma,\varphi)\in M$ 的解是唯一的.

证明与定理 5.2.2 的证明类似, 此处从略.

定理 5.3.3 设 $(\mathrm{b}_1)\sim(\mathrm{b}_3)$ 成立, $(\sigma_0,\varphi_0)\in M, f^0\in C^0_{\mathrm{a.e}}(M,\mathbb{R}^n)$, 又 FDE$(f^0)$ 在 $[\alpha(\sigma_0),b]$ 上存在唯一解 $x_0(t)$, 则当 $(\sigma_i,\varphi_i)\in M$, $f^i\in C^0_{\mathrm{a.e}}(M,\mathbb{R}^n)$ 且

$$d((\sigma_i,\varphi_i),(\sigma_0,\varphi_0))\to 0,\ |f^i-f^0|^M\to 0,\quad i\to\infty$$

时, FDE(f^i) 在 $[\alpha(\sigma_i),b]$ 上存在过 (σ_i,φ_i) 的解 $x_i(t)$, 且对任意 $\varepsilon>0$, 在 $[\sigma+\varepsilon,b]$ 上一致地有

$$x_i(t)\to x_0(t),\quad i\to\infty.$$

证明与定理 5.2.4 的证明类似, 此处从略.

定理 5.3.4 设 (b_1) 成立, Ω 是 M 中的开集, $(\sigma,\varphi)\in\Omega, f\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$, 则存在 $h>0$, 使 FDE(f) 在 $[\alpha(\sigma),\sigma+h]$ 上存在过 (σ,φ) 的解.

证明 设 $|f(\sigma,\varphi)|=M_1$. 集合

$$U_1=\{(t,\psi)\in\Omega|\ |f(t,\psi)-f(\sigma,\varphi)|<1\}$$

显然是 Ω 中的开集, 也是 M 中的开集. 设 $d((\sigma,\varphi),\Omega^c)=2r>0$, 则集合

$$U_2=\{(t,\psi)\in\Omega|d((t,\psi),(\sigma,\varphi))<\min\{r,1\}\}$$

也是 Ω 中的开集. 取 $U=U_1\cap U_2$, 其显然是 Ω 中的开集. $(\sigma,\varphi)\in U$ 且 U 的闭包 $\bar U\subset\Omega$, 显然 f 在 $\bar U$ 上有界. 由 Tietze-Urysohn 定理[36] 知 f 可以由 $\bar U$ 上延拓到 M 上去, 记此延拓为 f_1. 由定理 5.3.1 知 FDE(f_1) 的过 (σ,φ) 的解在 $[\alpha(\sigma),b]$(b 为任意大于 σ 的数) 上存在, 记为

$$x_1(t)=x(\sigma,\varphi,f_1)(t).$$

设

$$V=\{(s,x^s_1)|s\geqslant\sigma\}.$$

若 $V\subset U$, 因为在 U 中 $f=f_1$, 故

$$x_1(t)=x(\sigma,\varphi,f)(t).$$

若存在 $t>\sigma$, 使得 $(t,x_1^t)\notin U$, 则设

$$h_1=\inf_{t\geqslant\sigma}\{t|(t,x_1^t)\notin U\}.$$

显然 h_1 存在且有 $h_1>\sigma$. 取 h 满足 $0<h<h_1-\sigma$, 则当 $t\in[\sigma,\sigma+h]$ 时, $(t,x_1^t)\in U$. 由上面说明, FDE(f) 过 (σ,φ) 的解在 $[\sigma,\sigma+h]$ 上存在. ∎

定理 5.3.5 设定理 5.3.4 的条件都成立且 f 在 Ω 上满足局部 Lipschitz 条件, 则 FDE(f) 过 (σ,φ) 的解是唯一的.

证明类似于定理 5.2.2 的证明, 此处从略.

定理 5.3.6 设 Ω 是 M 中的开集, W 是 Ω 中的紧集, $f^0\in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$, 则必存在 W 的一个邻域 $V\subset\Omega$ 和 f^0 的一个邻域 $U(f^0)\subset C^0(V,\mathbb{R}^n)$ 以及数 $h>0$, 使得当 $f\in U(f^0),(\sigma,\varphi)\in V$ 时, FDE(f) 在 $[\alpha(\sigma),\sigma+h]$ 上存在过 (σ,φ) 的解.

证明　显然 f^0 在 W 上有界. 设 $|f^0(t,\psi)|\leqslant M_1$, 集合

$$V_1=\{(t,\psi)\in\Omega|\ |f^0(t,\psi)|<M_1+1\},$$

则 V_1 是 Ω 中的开集且 f^0 在 V_1 上有界. 因 $W\subset V_1$, 故存在 W 的开邻域 V, 使得 V 的闭包 $\bar V\subset V_1$, 故 $f^0\in C^0(V,\mathbb{R}^n)$.

设 $U(f^0)$ 为 $C^0(V,\mathbb{R}^n)$ 中以 f^0 为中心的单位球,

$$U(f^0)=\{f\in C^0(V,\mathbb{R}^n)|\ |f-f^0|^V<1\},$$

于是对任意 $(t,\psi)\in V$ 和任意 $f\in U(f^0)$ 有

$$|f(t,\psi)|\leqslant M_1+1:=M_2.$$

任取 $f\in U(f^0)$, 因 $\bar V\subset\Omega$, 由 Tietze-Urysohn 定理知 f 可由 $\bar V$ 延拓到 M 上, 记此延拓为 f_1. 对任意 $(\sigma,\varphi)\in W$, 由定理 5.3.1 知 $x(\sigma,\varphi,f_1)(t)$ 在 $[\alpha(\sigma),b](b>\sigma$ 为任意实数) 上存在. 设集合

$$Q=\{(s,x^s)|\sigma\leqslant s\leqslant b\}.$$

若 $Q\subset V$, 则

$$x(\sigma,\varphi,f_1)(t)=x(\sigma,\varphi,f)(t),\quad t\in[\sigma,b].$$

若存在 $(t,x^t)\notin V,t\in[\sigma,b]$, 则设

$$t^*=\inf_{\sigma\leqslant t\leqslant b}\{t|(t,x^t)\notin V\},$$

显然 $t^*\geqslant\sigma$.

因为 V 是开集, 故 V^c 是闭集且 $W\cap V^c=\varnothing$, 故 $d(W,V^c)=r>0$, 因而

$$d((t^*, x^{t^*}), (\sigma, \varphi)) \geqslant r,$$

即

$$|\sigma - t^*| + \rho(\bar{\varphi}, \bar{x}^{t^*}) \geqslant r.$$

由 (b_1) 有

$$\rho(\bar{\varphi}, \bar{x}^{t^*}) \leqslant Q|\bar{\varphi} - \bar{x}^{t^*}|^{\mathbb{R}},$$

由 x^{t^*} 的表达式知

$$|\bar{\varphi} - x^{\bar{t}^*}|^{\mathbb{R}} \leqslant \int_{\sigma}^{t^*} |f_1(s, x^s)|\mathrm{d}s \leqslant M_2|\sigma - t^*|,$$

故有

$$(1 + QM_2)|\sigma - t^*| \geqslant r, \quad |\sigma - t^*| \geqslant \frac{r}{1 + QM_2}.$$

取 $h = r/(1 + QM_2)$, 则在 $[\sigma, \sigma + h]$ 上有 $(t, x^t) \in V$, 故 $x(\sigma, \varphi, f)(t)$ 在 $[\alpha(\sigma), \sigma + h]$ 上存在 (注意 h 与 (σ, φ) 及 f 的选取无关), 定理得证. ∎

定理 5.3.7 *设 Ω 是 M 中的开集, $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, W 是 Ω 中的任一包含 (σ, φ) 的紧子集. 若 $x(\sigma, \varphi, f)(t)$ 是 FDE(f) 的定义在 $[\alpha(\sigma), b]$ 上的右行饱和解, 则必存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $t \in (b - \varepsilon, b)$ 时, $(t, x^t) \notin W$.*

证明 如果定理结论不真, 则存在 $t_n \to b^-$, $n \to \infty$ 且 $(t_n, x^{t_n}) \in W$. 由定理 5.3.6 知存在 $h > 0$, 使得 FDE(f) 在 $[\alpha(t_n), t_n + h]$ 存在过 (t_n, x^{t_n}) 的解, 但当 n 充分大时, $t_n + h > b$, 这与 $x(\sigma, \varphi, f)(t)$ 是定义在 $[\alpha(\sigma), b)$ 上的右行饱和解相矛盾. 由此定理得证. ∎

注 5.3.1 解的唯一性是微分方程理论研究中最古老的课题之一, 具有极其重要的理论意义和应用价值, 许多著名学者对此都进行了深入而广泛的研究, 得到了许多深刻的研究成果. 1993 年, Agarwal 和 Lakshmikantham[4] 首次对这方面的研究成果进行了比较全面、系统的总结, 所有的研究结果均是建立解唯一的充分性判据, 都有一定的适用范围. 一个自然问题是能否找到解唯一的充分必要条件? 文献 [4] 对已有的解的唯一性的充分性判据进行了比较全面的比较, 详细分析了其优缺点, 同时提出了一些公开问题, 以及可能的解决方法, 这为读者从事这方面研究提供了便利. 2004 年, Wang 等[159] 系统地研究了自治纯量常微分方程解的唯一性, 得到了解唯一的充分必要条件, 全面彻底地解决了此类方程的解的唯一性问题. 但对其他类型的方程, 至今仍是一个富有挑战性的公开问题, 文献 [159] 的方法不适用于高维系统. 文献 [159] 的研究表明, 初值问题解的唯一性与解的整体存在性有着紧密的联系. 能否建立初值问题的解整体存在的充分必要条件, 这也是一个公开问题, 文献 [159] 对此问题也进行了有益的尝试.

第 6 章　相空间理论在生物数学中的应用

在现实世界中, 由于种群密度增加而带来的种群增长率降低的效应, 并不始终都是立即发生的, 在许多情况下, 往往是有时滞的. 例如, 从节制生育到人口出生率的下降存在时间滞后, 到人口数量下降就需要更长的时间; 在动物的种群生态学方面, 对于繁殖前期很长的种类, 高密度对于出生率的影响往往出现在经过较长时间以后. 在种群动力学系统中至少可以考虑两类不同的时滞: 反应时滞 (从环境条件改变到相应的种群增长率改变之间的时滞) 和生殖时滞 (可以用妊娠期的长度或其他同等的量来度量).

在生物动力学系统中考虑时滞是必要且合理的, 泛函微分方程是刻画生物过程的强有力工具之一, 具有有限时滞的动力学系统已被广泛地进行了研究, 并取得了很好的研究结果, 但对于具有无限时滞的生物动力学系统的研究相对较少[34, 99, 116].

本章介绍相空间理论在具有无限时滞的生态竞争系统和捕食者–食饵系统的周期性和持久性中的应用.

6.1　广义多物种生态竞争系统的周期正解

考虑广义多物种生态竞争系统

$$x_i'(t) = h_i(t, x_t)\left[b_i(t, x_t) - a_i(t, x_t)x_i(t) - \int_{-\infty}^{t} G_i(t, s, x_1(s), \cdots, x_n(s))\mathrm{d}s\right], \quad i = 1, \cdots, n, \qquad (6.1.1)$$

其中, $x_i(t)$ 表示第 i 个种群在 t 时刻的密度. 在系统 (6.1.1) 中, 假设

(H_1) 存在常数 $T > 0$, 使得

$$G_i(t+T, s+T, x_1, \cdots, x_n) = G_i(t, s, x_1, \cdots, x_n)$$

且 $G_i : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 可测, 又存在恒正的连续 T 周期函数 $c_i(t)$ 和连续恒正函数 $h_i^*(s), s \leqslant 0$ 满足

$$|G_i(t, s, x_1, \cdots, x_n) - G_i(t, s, y_1, \cdots, y_n)| \leqslant c_i(t)h_i^*(s-t)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j - y_j|, \quad s \leqslant t,$$

$$\int_{-\infty}^{0} h_i^*(s)\mathrm{d}s < \infty, \quad G_i(t, s, 0, \cdots, 0) \equiv 0.$$

又设 $G_i(t,s,x_1,\cdots,x_n)$ 关于变元 $x_j, j=1,\cdots,n$ 是单调不减函数. 令

$$h(s)=\max\{h_1^*(s),\cdots,h_n^*(s)\},\quad s\leqslant 0,$$

则 $h:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$ 满足 $\int\limits_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s:=l<\infty$, 本节就以这个函数 $h(s)$ 定义 $\mathscr{C}_h$ 空间.

(H_2) $a_i,b_i,h_i:\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h\to\mathbb{R}^+$ 连续且存在常数 $L>0$, 使得对任意 $t\in\mathbb{R},\varphi,\psi\in\mathscr{C}_h$ 有

$$\begin{aligned}&|a_i(t,\varphi)-a_i(t,\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|_h,\quad a_i(t+T,\varphi)=a_i(t,\varphi),\\&|b_i(t,\varphi)-b_i(t,\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|_h,\quad b_i(t+T,\varphi)=b_i(t,\varphi),\\&|h_i(t,\varphi)-h_i(t,\psi)|\leqslant L|\varphi-\psi|_h,\quad h_i(t+T,\varphi)=h_i(t,\varphi),\\&h_i(t,0)=0,\quad h_i(t,\varphi)>0.\end{aligned}$$

(H_3)

$$\begin{aligned}&a_i^l=\inf_{(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h}a_i(t,\varphi)>0,\quad b_i^l=\inf_{(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h}b_i(t,\varphi)>0,\\&a_i^u=\sup_{(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h}a_i(t,\varphi)>0,\quad b_i^u=\sup_{(t,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h}b_i(t,\varphi)>0,\\&b_i^l>g_i^u,\end{aligned}$$

其中,

$$g_i^u=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{-\infty}^{t}G_i\left(t,s,\frac{b_1^u}{a_1^l},\cdots,\frac{b_n^u}{a_n^l}\right)\mathrm{d}s.$$

在本章, 如不特别指出, $i=1,\cdots,n$.

引理 6.1.1 *方程 (6.1.1) 的右端泛函在 $\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$ 上连续且对 φ 满足局部 Lipschitz 条件.*

证明 方程 (6.1.1) 的右端泛函为

$$f_i(t,\varphi)=h_i(t,\varphi)\left[b_i(t,\varphi)-a_i(t,\varphi)\varphi_i(0)-\int\limits_{-\infty}^{0}G_i(t,t+s,\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s))\mathrm{d}s\right],$$

其中,

$$\varphi(s)=(\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s)),\quad s\leqslant 0,\quad \varphi\in\mathscr{C}_h.$$

首先证明 $f_i(t,\varphi)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$ 中是连续的. 由条件 (H_1), 只需验证泛函

$$F_i(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0}G_i(t,t+s,\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s))\mathrm{d}s$$

在 $\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$ 中是连续的. 为此, 任取 $(t,\varphi),(\tau,\psi)\in\mathbb{R}\times\mathscr{C}_h$ 有

$$\begin{aligned}
&|F_i(t,\varphi)-F_i(\tau,\psi)|\\
\leqslant&\int_{-\infty}^{0}|G_i(t,t+s,\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s))-G_i(\tau,\tau+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\mathrm{d}s\\
\leqslant&\int_{-\infty}^{0}|G_i(t,t+s,\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s))-G_i(t,t+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\mathrm{d}s\\
&+\int_{-\infty}^{0}|G_i(t,t+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))-G_i(\tau,\tau+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\mathrm{d}s\\
:=&I_1+I_2.
\end{aligned}$$

由条件 (H_1),

$$I_1\leqslant\int_{-\infty}^{0}c_i(t)h_i^*(s)|\varphi(s)-\psi(s)|\mathrm{d}s\leqslant c_i(t)|\varphi-\psi|_h,$$

故当 $|\varphi-\psi|_h\to 0$ 时, $I_1\to 0$.

另一方面, 因为

$$\begin{aligned}
&|G_i(t,t+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))-G_i(\tau,\tau+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\\
\leqslant&|G_i(t,t+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|+|G_i(\tau,\tau+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\\
\leqslant&c_i(t)h_i^*(s)|\psi(s)|+c_i(\tau)h_i^*(s)|\psi(s)|.
\end{aligned}$$

当 $|t-\tau|$ 充分小时有

$$c_i(t)+c_i(\tau)\leqslant 3c_i(\tau),$$

从而有

$$\begin{aligned}
I_2=&|G_i(t,t+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))-G_i(\tau,\tau+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\\
\leqslant&3c_i(\tau)h_i^*(s)|\psi(s)|.
\end{aligned}$$

此时有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{0}|G_i(t,t+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))-G_i(\tau,\tau+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\mathrm{d}s\\
\leqslant&3c_i(\tau)\int_{-\infty}^{0}h_i^*(s)|\psi(s)|\mathrm{d}s\leqslant 3c_i(\tau)|\psi|_h<\infty.
\end{aligned}$$

于是, 由控制收敛定理知当 $|t-\tau|\to 0$ 时有 $I_2\to 0$.

因此, 当 $|t-\tau|+|\varphi-\psi|_h \to 0$ 时有

$$|F_i(t,\varphi)-F_i(\tau,\psi)| \to 0,$$

从而 $F_i(t,\varphi)$ 是连续的, 于是 $f_i(t,\varphi)$ 也是连续的.

下面证明 $f_i(t,\varphi)$ 对 φ 满足局部 Lipschitz 条件.

定义

$$H_i(\varphi) := \max_{0\leqslant t\leqslant T} h_i(t,\varphi),$$

则 $H_i(\varphi)$ 是 $\mathscr{C}_h$ 中的连续泛函, 集合

$$E_i = \{\xi \in \mathscr{C}_h \,|\, |H_i(\xi)-H_i(\varphi_0)|<1, |\xi-\varphi_0|_h<1\}$$

是开集, 其中, $\varphi_0 \in \mathscr{C}_h$ 是任意的. 若 $\varphi,\psi \in E_i$, 则有

$$\begin{aligned}
&|f_i(t,\varphi)-f_i(t,\psi)| \\
\leqslant& |h_i(t,\varphi)-h_i(t,\psi)|\left[|b_i(t,\varphi)|+|a_i(t,\varphi)\varphi_i(0)|+\int_{-\infty}^{0}|G_i(t,t+s,\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s))|\mathrm{d}s\right] \\
&+|h_i(t,\psi)|\Bigg[|b_i(t,\varphi)-b_i(t,\psi)|+|a_i(t,\varphi)\varphi_i(0)-a_i(t,\psi)\psi_i(0)| \\
&+\int_{-\infty}^{0}|G_i(t,t+s,\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s))-G_i(t,t+s,\psi_1(s),\cdots,\psi_n(s))|\mathrm{d}s\Bigg] \\
\leqslant& L|\varphi-\psi|_h[b_i^u+a_i^u l^{-1}(1+|\psi_0|_h)+c_i(t)(1+|\varphi_0|_h)] \\
&+(H_i(\varphi_0)+1)[L|\varphi-\psi|_h+[a_i^u+L(|\varphi_0|_h+1)]l^{-1}|\varphi-\psi|_h+c_i(t)|\varphi-\psi|_h].
\end{aligned}$$

因为 $c_i(t)$ 是 T 周期函数, 故 $f_i(t,\varphi)$ 对 φ 满足局部 Lipschitz 条件. ∎

引理 6.1.2 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任意紧集, 如果 $\varphi \in \mathscr{C}_h, \varphi(s) \in D, s \leqslant 0$, 则存在常数 $L_D>0$, 使得 $|f_i(t,\varphi)| \leqslant L_D,\ t \in \mathbb{R}^+$.

证明 因为 D 是紧集, 故存在 $r>0$, 使得对任意 $x \in D$ 有 $|x| \leqslant r$. 于是

$$\begin{aligned}
|f_i(t,\varphi)| &\leqslant (|h_i(t,\varphi)-h_i(t,0)|+|h_i(t,0)|)\left[b_i^u+ra_i^u+\int_{-\infty}^{0}G_i(t,t+s,r,\cdots,r)\mathrm{d}s\right] \\
&\leqslant (Llr+h_i^u)[b_i^u+ra_i^u+G_i^u] := L_D,
\end{aligned}$$

其中,

$$h_i^u = \max_{0\leqslant t\leqslant T} h_i(t,0), \quad G_i^u = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_{-\infty}^{t} G_i(t,s,r,\cdots,r)\mathrm{d}s.$$

引理证毕. ∎

定理 6.1.1　假设 $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_3)$ 成立, 则系统 (6.1.1) 存在 T 周期解 $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 满足

$$0 < \frac{b_i^l - g_i^u}{a_i^u} \leqslant x_i(t) \leqslant \frac{b_i^u}{a_i^l}.$$

证明　由引理 6.1.1、引理 2.4.1 知定理 1.4.1 的条件 (1) 成立; 由条件 (H_1) 和 (H_2) 知定理 1.4.1 的条件 (2) 成立; 由引理 6.1.2 知定理 1.4.1 的条件 (3) 成立.

下面构造系统 (6.1.1) 的内向凸紧集 (见定义 1.4.2).

任取 $\lambda \in (0,1)$, 取一待定的 $\varepsilon > 0$, 定义

$$\xi_i = (1+\varepsilon\lambda)\frac{b_i^u}{a_i^l}, \quad \eta_i = (1-\lambda)\frac{b_i^l - g_i^u}{a_i^u}.$$

由条件 (H_3), 显然有 $0 < \eta_i < \xi_i$. 定义集合

$$\Omega := [\eta_1, \xi_1] \times [\eta_2, \xi_2] \times \cdots \times [\eta_n, \xi_n].$$

显然 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是紧凸集. 下面证明关于系统 (6.1.1), Ω 是内向的.

若 $\varphi \in \mathscr{C}_h, \varphi(s) \in \Omega, s \leqslant 0$ 且对某个 $i \in \{1, \cdots, n\}$ 有 $\varphi_i(0) = \xi_i$, 则有

$$\begin{aligned}
&b_i(t,\varphi) - a_i(t,\varphi)\varphi_i(0) - \int_{-\infty}^{0} G_i(t, t+s, \varphi_1(s), \cdots, \varphi_n(s))\mathrm{d}s \\
\leqslant{}& b_i^u - a_i^l\xi_i - \int_{-\infty}^{0} G_i(t, t+s, \eta_1, \cdots, \eta_n)\mathrm{d}s \\
={}& -\varepsilon\lambda b_i^u - \int_{-\infty}^{t} G_i(t, s, \eta_1, \cdots, \eta_n)\mathrm{d}s < 0,
\end{aligned}$$

因而有 $f_i(t,\varphi) < 0$.

若 $\psi \in \mathscr{C}_h, \psi(s) \in \Omega, s \leqslant 0$ 且对某个 $i \in \{1, \cdots, n\}$ 有 $\psi_i(0) = \eta_i$, 则有

$$\begin{aligned}
&b_i(t,\varphi) - a_i(t,\varphi)\varphi_i(0) - \int_{-\infty}^{0} G_i(t, t+s, \varphi_1(s), \cdots, \varphi_n(s))\mathrm{d}s \\
\geqslant{}& b_i^l - a_i^u\eta_i - \int_{-\infty}^{0} G_i(t, t+s, \xi_1, \cdots, \xi_n)\mathrm{d}s \\
={}& b_i^l - (1-\lambda)(b_i^l - g_i^u) - \int_{-\infty}^{0} G_i(t, t+s, \xi_1, \cdots, \xi_n)\mathrm{d}s \\
\geqslant{}& \lambda(b_i^l - g_i^u) - \int_{-\infty}^{0} \left[G_i(t, t+s, \xi_1, \cdots, \xi_n) - G_i\left(t, t+s, \frac{b_1^u}{a_1^l}, \cdots, \frac{b_n^u}{a_n^l}\right)\right]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$\geqslant \lambda(b_i^l - g_i^u) - c_i(t)\int_{-\infty}^{0} h(s)\max\left\{\left|\xi_1 - \frac{b_1^u}{a_1^l}\right|, \cdots, \left|\xi_n - \frac{b_n^u}{a_n^l}\right|\right\}\mathrm{d}s$$

$$\geqslant \lambda(b_i^l - g_i^u) - c_i^* l\lambda\varepsilon \max\left\{\frac{b_1^u}{a_1^l}, \cdots, \frac{b_n^u}{a_n^l}\right\},$$

其中, $c_i^* = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} c_i(t)$. 取 ε 满足

$$b_i^l - g_i^u > c_i^* l\varepsilon \max\left\{\frac{b_1^u}{a_1^l}, \cdots, \frac{b_n^u}{a_n^l}\right\},$$

则有

$$b_i(t,\varphi) - a_i(t,\varphi)\varphi_i(0) - \int_{-\infty}^{0} G_i(t, t+s, \varphi_1(s), \cdots, \varphi_n(s))\mathrm{d}s$$

$$\geqslant \lambda\left[(b_i^l - g_i^u) - c_i^* l\varepsilon \max\left\{\frac{b_1^u}{a_1^l}, \cdots, \frac{b_n^u}{a_n^l}\right\}\right] > 0,$$

因而 $f_i(t,\varphi) > 0$. 因此 Ω 是系统 (6.1.1) 的内向凸紧集, 故定理 1.4.1 的条件 (4) 成立.

由定理 1.4.1 知系统 (6.1.1) 存在 T 周期解 $x^\lambda(t)$ 且 $x^\lambda(t) \in \Omega, t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{(1-\lambda)(b_i^l - g_i^u)}{a_i^u} \leqslant x_i^\lambda(t) \leqslant (1+\varepsilon\lambda)\frac{b_i^u}{a_i^l}.$$

取 $\lambda_n = 1/n$, 并记 $x_n(t) = x^{\lambda_n}(t), t \in [0,T]$. 由引理 6.1.2 知序列 $\{x_n\}$ 是一致有界、等度连续的, 故 $\{x_n\}$ 存在子序列在 $[0,T]$ 上一致收敛, 不失一般性, 设为其本身. 设其极限函数为 $x^*(t), t \in [0,T]$. 因为 $x_n(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 故 $x^*(t)$ 也可以看成定义在 $\mathbb{R}$ 上. 由引理 2.1.2 知 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_t^* - (x_n)_t|_h = 0$.

设 $f = (f_1, \cdots, f_n)$, 则系统 (6.1.1) 可以写成为

$$x'(t) = f(t, x_t),$$

其等价形式为

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x_s)\mathrm{d}s.$$

因为 $x_n(t), t \in \mathbb{R}$ 是系统 (6.1.1) 的解, 故有

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t f(s, (x_n)_s)\mathrm{d}s,$$

对任意 $t \in \mathbb{R}$, 在上式两端同时令 $n \to +\infty$ 有

$$x^*(t) = x^*(0) + \int_0^t f(s, x_s^*)\mathrm{d}s,$$

因而 $x^*(t)$ 也是系统 (6.1.1) 的解, 它显然是 T 周期的. 定理证毕. ■

作为例子, 考察下面的 Volterra 型积分微分方程所描述的多种群生态竞争系统:

$$x_i'(t) = x_i(t)\left\{b_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(t)\int_{-\infty}^{t} k_{ij}(t-s)x_j(s)\mathrm{d}s\right\}. \tag{6.1.2}$$

对系统 (6.1.2) 应用定理 6.1.1, 有如下推论:

推论 6.1.1　*设 $a_{ij}(t), b_i(t), i \neq j$ 为连续、恒正的 T 周期函数, $k_{ij}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, i \neq j$ 连续且满足 $\int_0^\infty k_{ij}(s)\mathrm{d}s = 1$. 如果*

$$b_i^l > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \frac{b_j^u a_{ij}^u}{a_{jj}^l},$$

其中,

$$b_i^l = \inf_{t\in\mathbb{R}} b_i(t), \quad a_{ij}^l = \inf_{t\in\mathbb{R}} a_{ij}(t),$$
$$b_i^u = \sup_{t\in\mathbb{R}} b_i(t), \quad a_{ij}^u = \sup_{t\in\mathbb{R}} a_{ij}(t),$$

则系统 (6.1.2) 存在 T 周期解 $x_i(t)$ 且满足

$$\frac{b_i^l - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \dfrac{b_j^u a_{ij}^u}{a_{jj}^l}}{a_{ii}^u} \leqslant x_i(t) \leqslant \frac{b_i^u}{a_{ii}^l}.$$

注 6.1.1　文献 [65, 74, 124] 研究了系统 (6.1.2) 的正周期解的存在性, 推论 6.1.1 推广并改进了上述文献的相关结果.

注 6.1.2　本节内容主要取自文献 [154]. 以 $\mathscr{C}_h$ 相空间理论为基础, Wang[156] 研究了系统 (6.1.1) 的持久性.

注 6.1.3　从本节的证明中可以看出, 在假设 (H_2) 中, 对 $h_i^*(s), s \leqslant 0$, 可以用可积的要求代替连续的要求. 此外, 函数 $G_i(t, s, x_1, \cdots, x_n)$ 对变元 x_j 是单调不减的条件是可以去掉的, 函数 $a_i(t,\varphi), b_i(t,\varphi), h_i(t,\varphi)$ 关于 φ 满足 Lipschitz 条件可以减弱为满足局部 Lipschitz 条件. 这里, 为了行文简洁, 并突出方法上的特色才使用上述相对比较强的条件.

6.2 广义非自治捕食者-食饵系统的持久性

生态系统的持久性是数学生态学研究的主要课题之一, 历来受到学术界的重视, 许多学者都进行了广泛而深入的研究, 发展了多种研究方法. 对于具有无限时滞的生态学系统, 研究工作相对很少, 通常所使用的动力系统流分析方法 (详细介绍及最新进展参见文献 [188]) 和 Lyapunov 第二方法[89, 90] 难于应用, 文献 [155] 发展了一种新的方法, 直接对所研究的系统的右端泛函进行详尽的分析, 这种方法克服了通常方法的不足之处, 得到的结果更为广泛. 近年来, 这一方法被广泛用于生态学动力系统的持久性的研究.

本节介绍文献 [155] 的结果.

考虑如下具有无限时滞的非自治、非卷积的捕食者-食饵系统:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t) - c(t)y(t)], \\ y'(t) = y(t)\left[-d(t) + \int_{-\infty}^{t} K(s,t,x(s),x(t))\mathrm{d}s\right], \end{cases} \tag{6.2.1}$$

其中, $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示食饵种群和捕食者种群在 t 时刻的种群密度或种群规模.

在系统 (6.2.1) 中, 假设

(H_1) $K:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 可测, $K(s,t,0,0)\equiv 0$, $K(s,t,x,y)$ 关于 x,y 单调增加且存在可测函数 $h(t):\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$ 满足 $\int_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s = l < +\infty$, 使得

$$|K(s,t,x,y) - K(s,t,\bar{x},\bar{y})| \leqslant h(s-t)(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|), \quad s \leqslant t.$$

(H_2) $a,b,c,d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 连续且

$$\begin{aligned} a^l &= \inf_{t\in\mathbb{R}} a(t) > 0, & b^l &= \inf_{t\in\mathbb{R}} b(t) > 0, \\ a^u &= \sup_{t\in\mathbb{R}} a(t) < +\infty, & b^u &= \sup_{t\in\mathbb{R}} b(t) < +\infty, \\ c^l &= \inf_{t\in\mathbb{R}} c(t) > 0, & d^l &= \inf_{t\in\mathbb{R}} d(t) > 0, \\ c^u &= \sup_{t\in\mathbb{R}} c(t) < +\infty, & d^u &= \sup_{t\in\mathbb{R}} d(t) < +\infty. \end{aligned}$$

由条件 (H_1) 中的函数 h 定义 $\mathscr{C}_h$ 空间. 设 φ_i 表示 φ 的第 i 个分量, $i=1,2$. 定义

$$\begin{aligned} B\mathscr{C}_h^+ &= \{\varphi\in\mathscr{C}_h | \varphi\text{有界且}\varphi_i(s)\geqslant 0, s\leqslant 0, i=1,2\}, \\ \operatorname{int} B\mathscr{C}_h^+ &= \{\varphi\in B\mathscr{C}_h^+ | \varphi_i(s) > 0, s\leqslant 0, i=1,2\}. \end{aligned}$$

对任意的 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times B\mathscr{C}_h^+$, 系统 (6.2.1) 过 (σ,φ) 的解 $(x(\sigma,\varphi)(t),y(\sigma,\varphi)(t)):=(x(t),y(t))$ 存在且唯一, 并且满足延展定理及解对初值的连续相依性定理. 容易证明 $x(t)>0,y(t)>0$.

为了研究系统 (6.2.1) 的持久性, 首先给出持久性和一致持久性的定义 (其他的等价定义可参考文献 [143]) 和几个基本引理.

定义 6.2.1　系统 (6.2.1) 称为是持久的, 如果存在 $M>0$, 使得对任意的 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times B\mathscr{C}_h^+$, 当 $t\geqslant\sigma$ 时有

$$0<x(\sigma,\varphi)(t)<M,\quad \liminf_{t\to+\infty}x(\sigma,\varphi)(t)>0,$$

$$0<y(\sigma,\varphi)(t)<M,\quad \liminf_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)>0.$$

如果系统 (6.2.1) 不是持久的, 则称系统 (6.2.1) 为非持久的. 如果系统 (6.2.1) 是持久的且存在与解无关的 $m>0$, 使得

$$\liminf_{t\to+\infty}x(\sigma,\varphi)(t)>m,\quad \liminf_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)>m,$$

称系统 (6.2.1) 为一致持久的.

引理 6.2.1　对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}B\mathscr{C}_h^+$ 有

$$\limsup_{t\to+\infty}x(\sigma,\varphi)(t)\leqslant\frac{a^u}{b^l}. \tag{6.2.2}$$

证明　由 (6.2.1) 的食饵方程有

$$x'(t)\leqslant x(t)(a^u-b^lx(t)),\quad t\geqslant\sigma,$$

由比较定理易证

$$x(t)\leqslant\left[\frac{b^l}{a^u}+\left(\frac{1}{x(\sigma)}-\frac{b^l}{a^u}\right)\mathrm{e}^{-a^u(t-\sigma)}\right]^{-1}<x(\sigma)+\frac{a^u}{b^l},\quad t\geqslant\sigma.$$

因而有

$$y'(t)\leqslant y(t)\left[-d^l+2l\left(x(\sigma)+\frac{a^u}{b^l}\right)\right],\quad t\geqslant\sigma.$$

由延展定理, $(x(t),y(t))$ 在 $[\sigma,+\infty)$ 上存在. 令 $t\to\infty$, 就得到了 (6.2.2). ∎

引理 6.2.2　对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}B\mathscr{C}_h^+$ 有

$$\liminf_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)\leqslant\frac{a^u}{c^l}.$$

证明　假设结论不真, 则存在 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}B\mathscr{C}_h^+$ 及 $\delta>0$, 使得

$$\liminf_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)=\frac{a^u}{c^l}+2\delta, \tag{6.2.3}$$

从而存在 $M_1 > \sigma$, 当 $t \geqslant M_1$ 时有 $y(t) > a^u/c^l + \delta$. 因而有

$$x'(t) \leqslant x(t)\left[a^u - c^l\left(\frac{a^u}{c^l} + \delta\right)\right] = -\delta c^l x(t),\ t \geqslant M_1,$$

故 $x(t) \leqslant x(M_1)\exp\{-\delta c^l(t - M_1)\},\ t \geqslant M_1$. 由此推得

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0. \tag{6.2.4}$$

因为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} K(s,t,x(s),x(t))\mathrm{d}s &\leqslant \int_{-\infty}^{t} h(s-t)(|x(s)| + |x(t)|)\,\mathrm{d}s \\ &= lx(t) + \int_{-\infty}^{\sigma} h(s-t)\varphi_1(s-\sigma)\mathrm{d}s + \int_{\sigma}^{t} h(s-t)\ x(s)\mathrm{d}s \\ &:= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

显然, 当 $t \to \infty$ 时, $I_1 \to 0$. 另一方面,

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_{-\infty}^{\sigma} h(s-t)\varphi_1(s-\sigma)\mathrm{d}s \\ &\leqslant |\varphi_1|^{\mathbb{R}^-}\int_{-\infty}^{\sigma-t} h(s)\mathrm{d}s \to 0, \quad t \to +\infty.\end{aligned}$$

由 (6.2.4), 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M_2 > \sigma$, 使得 $x(t) < \dfrac{\varepsilon}{2l}$, $t \geqslant M_2$. 设 $N = \sup\limits_{\sigma\leqslant t\leqslant M_2} x(t)$. 存在 $M_3 > M_2$, 使得

$$\int_{-\infty}^{M_2-t} h(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}, \quad t \geqslant M_3.$$

于是, 当 $t \geqslant M_3$ 时,

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_{\sigma}^{M_2} h(s-t)x(s)\mathrm{d}s + \int_{M_2}^{t} h(s-t)x(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_{\sigma-t}^{M_2-t} h(s)x(s+t)\mathrm{d}s + \frac{\varepsilon}{2l}\int_{M_2-t}^{0} h(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant N\int_{-\infty}^{M_2-t} h(s)\mathrm{d}s + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{t\to\infty} I_3 = 0$. 至此已经证明

$$\int_{-\infty}^{t} K(s,t,x(s),x(t))\mathrm{d}s \to 0, \quad t \to +\infty.$$

因此, 存在 $M_4 > M_3$, 使得

$$\int_{-\infty}^{t} K(s,t,x(s),x(t))\mathrm{d}s < \frac{d^l}{2}, \quad t \geqslant M_4,$$

从而

$$y'(t) \leqslant y(t)\left(-d^l + \frac{d^l}{2}\right) = -\frac{d^l}{2}y(t), \quad t \geqslant M_4,$$

$$y(t) \leqslant y(M_4)\exp\left\{-\frac{d^l}{2}(t-M_4)\right\}, \quad t \geqslant M_4,$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0,$$

这与 (6.2.3) 矛盾. 引理证毕. ∎

引理 6.2.3 *存在 $T > 0$, 使得对任意的 $(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}\times \operatorname{int}B\mathscr{C}_h^+$ 有*

$$\limsup_{t\to+\infty} y(\sigma,\varphi)(t) \leqslant T.$$

证明 假设结论不真, 则存在 $(\sigma_m,\varphi^m) \in \mathbb{R}\times\operatorname{int}B\mathscr{C}_h^+$, 使得

$$\limsup_{t\to+\infty} y(\sigma_m,\varphi^m)(t) > m + \frac{3a^u}{c^l}, \quad m = 1,2,\cdots.$$

由引理 6.2.1, 不妨设

$$\varphi_1^m(0) < \frac{2a^u}{b^l}, \quad m = 1,2,\cdots.$$

由引理 6.2.2 知

$$\liminf_{t\to+\infty} y(\sigma_m,\varphi^m)(t) \leqslant \frac{a^u}{c^l}, \quad m = 1,2,\cdots.$$

于是存在数列

$$\sigma_m < \tau_1^{(m)} < t_1^{(m)} < \tau_2^{(m)} < t_2^{(m)} < \cdots < \tau_k^{(m)} < t_k^{(m)} < \cdots,$$

使得当 $k \to +\infty$ 时, $\tau_k^{(m)} \to +\infty$ 及

$$\begin{cases} y(\sigma_m,\varphi^m)(\tau_k^{(m)}) = \dfrac{2a^u}{c^l}, \\ y(\sigma_m,\varphi^m)(t_k^{(m)}) = \dfrac{2a^u}{c^l} + m, \\ \dfrac{2a^u}{c^l} < y(\sigma_m,\varphi^m)(t) < \dfrac{2a^u}{c^l} + m, \quad t \in (\tau_k^{(m)}, t_k^{(m)}). \end{cases} \tag{6.2.5}$$

由引理 6.2.1, 存在 $M_1^{(m)} \geqslant \sigma_m$, 使得

$$x(\sigma_m, \varphi^m)(t) \leqslant \frac{2a^u}{b^l}, \quad t \geqslant M_1^{(m)}.$$

当 $t \geqslant M_1^{(m)}$ 时, 由系统 (6.2.1) 的捕食者方程有

$$\begin{aligned} y'(\sigma_m, \varphi^m)(t) \leqslant & y(\sigma_m, \varphi^m)(t) \left(\int_{-\infty}^{\sigma_m} + \int_{\sigma_m}^{M_1^{(m)}} + \int_{M_1^{(m)}}^{t} \right) h(s-t)[x(\sigma_m, \varphi^m)(s) \\ & + x(\sigma_m, \varphi^m)(t)]\mathrm{d}s \\ \leqslant & y(\sigma_m, \varphi^m)(t) \left\{ \frac{2la^u}{b^l} + \int_{-\infty}^{\sigma_m} h(s-t)\varphi_1^m(s-\sigma_m)\mathrm{d}s \right. \\ & \left. + \int_{\sigma_m}^{M_1^{(m)}} h(s-t)x(\sigma_m, \varphi^m)(s)\mathrm{d}s + \int_{M_1^{(m)}}^{t} h(s-t)\frac{2a^u}{b^l}\mathrm{d}s \right\} \\ \leqslant & y(\sigma_m, \varphi^m)(t) \left\{ \frac{4la^u}{b^l} + |\varphi_1^m|^{\mathbb{R}^-} \int_{-\infty}^{\sigma_m - t} h(s)\mathrm{d}s + N^{(m)} \int_{-\infty}^{M_1^{(m)}-t} h(s)\mathrm{d}s \right\}, \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

其中,

$$N^{(m)} = \max_{\sigma_m \leqslant s \leqslant M_1^{(m)}} x(\sigma_m, \varphi^m)(s).$$

存在 $M_2^{(m)} > M_1^{(m)}$, 使得当 $t \geqslant M_2^{(m)}$ 时有

$$\begin{aligned} |\varphi_1^m|^{\mathbb{R}^-} \int_{-\infty}^{\sigma_m - t} h(s)\mathrm{d}s \leqslant \min\left\{ \frac{la^u}{b^l}, \frac{d^l}{4} \right\}, \\ N^{(m)} \int_{-\infty}^{M_1^{(m)}-t} h(s)\mathrm{d}s \leqslant \min\left\{ \frac{la^u}{b^l}, \frac{d^l}{4} \right\}. \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

于是当 $t \geqslant M_2^{(m)}$ 时有

$$y'(\sigma_m, \varphi^m)(t) \leqslant \frac{6la^u}{b^l} y(\sigma_m, \varphi^m)(t).$$

存在 $K_1^{(m)} > 0$, 使得当 $k \geqslant K_1^{(m)}$ 时有 $\tau_k^{(m)} \geqslant M_2^{(m)}$. 因而当 $k \geqslant K_1^{(m)}, t \geqslant \tau_k^{(m)}$ 时有

$$y'(\sigma_m, \varphi^m)(t) \leqslant \frac{6la^u}{b^l} y(\sigma_m, \varphi^m)(t).$$

从而

$$y(\sigma_m,\varphi^m)(t_k^{(m)}) \leqslant y(\sigma_m,\varphi^m)(\tau_k^{(m)}) \exp\left\{\frac{6la^u}{b^l}(t_k^{(m)}-\tau_k^{(m)})\right\}$$
$$= \frac{2a^u}{c^l}\exp\left\{\frac{6la^u}{b^l}(t_k^{(m)}-\tau_k^{(m)})\right\}.$$

由此推得

$$t_k^{(m)}-\tau_k^{(m)} \geqslant \frac{b^l}{6la^u}\ln\left(\frac{mc^l}{2a^u}+1\right), \quad k\geqslant K_1^{(m)}. \tag{6.2.8}$$

又当 $k\geqslant K_1^{(m)}, t\in[\tau_k^{(m)},t_k^{(m)}]$ 时有

$$x'(\sigma_m,\varphi^m)(t) \leqslant x(\sigma_m,\varphi^m)(t)\left[a^u - c^l\frac{2a^u}{c^l}\right] = -a^u x(\sigma_m,\varphi^m)(t),$$

从而

$$x(\sigma_m,\varphi^m)(t) \leqslant x(\sigma_m,\varphi^m)(\tau_k^{(m)})\exp\left\{-a^u(t-\tau_k^{(m)})\right\}$$
$$\leqslant \frac{2a^u}{b^l}\exp\left\{-a^u(t-\tau_k^{(m)})\right\}. \tag{6.2.9}$$

存在 $L_1>0$, 使得

$$\frac{2a^u}{b^l}\exp\{-a^uL_1\} < \frac{d^l}{12l}. \tag{6.2.10}$$

存在 $L_2>L_1$, 使得

$$\frac{2a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{L_1-L_2} h(s)\mathrm{d}s < \frac{d^l}{12}. \tag{6.2.11}$$

由 (6.2.8) 知存在 $N_1>0$, 当 $m\geqslant N_1, k\geqslant K_1^{(m)}$ 时有 $t_k^{(m)}-\tau_k^{(m)}\geqslant L_1+L_2$. 由 (6.2.6), (6.2.7) 知当 $m\geqslant N_1, k\geqslant K_1^{(m)}, t\in[\tau_k^{(m)}+L_1+L_2, t_k^{(m)}]$ 时有

$$y'(\sigma_m,\varphi^m)(t) \leqslant y(\sigma_m,\varphi^m)(t)\left[-d^l+\frac{d^l}{4}+\frac{d^l}{4}+\int_{M_1^{(m)}}^{t} h(s-t)x(\sigma_m,\varphi^m)(s)\mathrm{d}s\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{t} h(s-t)x(\sigma_m,\varphi^m)(t)\mathrm{d}s\right]$$
$$= y(\sigma_m,\varphi^m)(t)\left[-\frac{d^l}{2}+\left(\int_{M_1^{(m)}}^{\tau_k^{(m)}+L_1}+\int_{\tau_k^{(m)}+L_1}^{t}\right)h(s-t)\right.$$
$$\left.\times x(\sigma_m,\varphi^m)(s)\mathrm{d}s + lx(\sigma_m,\varphi^m)(t)\right]. \tag{6.2.12}$$

由 (6.2.11), 当 $t\in[\tau_k^{(m)}+L_1+L_2,t_k^{(m)}]$ 时有

$$\int_{M_1^{(m)}}^{\tau_k^{(m)}+L_1} h(s-t)x(\sigma_m,\varphi^m)(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{2a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{\tau_k^{(m)}+L_1-t} h(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\frac{2a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{L_1-L_2} h(s)\mathrm{d}s<\frac{d^l}{12},\qquad(6.2.13)$$

由 (6.2.9), (6.2.10) 知

$$\int_{\tau_k^{(m)}+L_1}^{t} h(s-t)x(\sigma_m,\varphi^m)(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{d^l}{12},\quad lx(\sigma_m,\varphi^m)(t)\leqslant\frac{d^l}{12}.\qquad(6.2.14)$$

由 (6.2.12)~(6.2.14), 当 $m\geqslant N_2,k\geqslant K_1^{(m)},t\in[\tau_k^{(m)}+L_1+L_2,t_k^{(m)}]$ 时有

$$y'(\sigma_m,\varphi^m)(t)\leqslant-\frac{d^l}{4}y(\sigma_m,\varphi^m)(t)<0,$$

从而

$$y(\sigma_m,\varphi^m)(t_k^{(m)})<y(\sigma_m,\varphi^m)(\tau_k^{(m)}+L_1+L_2)<m+\frac{2a^u}{c^l}.$$

这与 (6.2.5) 相矛盾. 引理证毕. ∎

定义 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$,

$$f(\alpha)=\inf_{t\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{t}K(s,t,\alpha,\alpha)\mathrm{d}s.$$

由 (H_1) 易知 $f(\alpha)$ 有定义且关于 α 单调增加.

引理 6.2.4 如果

(H_3)
$$f\left(\frac{a^l}{b^u}\right)>d^u,$$

则存在 $\delta>0$, 使得

$$f\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)-d^u\geqslant\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a^l}{b^u}\right)-d^u\right].$$

证明 令 $\varepsilon=f\left(\dfrac{a^l}{b^u}\right)-d^u>0$, 取 $0<\delta\leqslant\min\left\{\dfrac{b^u\varepsilon}{4lc^u},\dfrac{a^l}{2c^u}\right\}$, 则有 $a^l-c^u\delta>0$ 及

$$\int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^l}{b^u},\frac{a^l}{b^u}\right)\mathrm{d}s-d^u\geqslant\varepsilon,$$

于是

$$\int_{-\infty}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l}{b^u},\frac{a^l}{b^u}\right)\mathrm{d}s - K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{t} h(s-t)\frac{2c^u\delta}{b^u}\mathrm{d}s = \frac{2lc^u\delta}{b^u} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\int_{-\infty}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s - d^u \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

因此

$$f\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

证毕. ■

引理 6.2.5　假设 (H_3) 成立, 则对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}\ B\mathscr{C}_h^+$ 有

$$\limsup_{t\to+\infty} y(\sigma,\varphi)(t) \geqslant \frac{\delta}{2}. \tag{6.2.15}$$

证明　假设 (6.2.15) 不成立, 则存在 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}\ B\mathscr{C}_h^+$, 使得

$$\limsup_{t\to+\infty} y(\sigma,\varphi)(t) < \frac{\delta}{2}. \tag{6.2.16}$$

记 $x(t)=x(\sigma,\varphi)(t), y(t)=y(\sigma,\varphi)(t)$. 由 (6.2.16), 存在 $M_1>\sigma$, 使得当 $t\geqslant M_1$ 时有 $y(t)<\delta/2$, 于是有

$$x'(t) > x(t)\left[a^l - b^u x(t) - c^u\frac{\delta}{2}\right],\quad t\geqslant M_1. \tag{6.2.17}$$

考虑辅助方程

$$z'(t) = z(t)\left[a^l - b^u z(t) - c^u\frac{\delta}{2}\right],\quad z(M_1)=x(M_1),$$

解得

$$z(t)=\left[\frac{b^u}{a^l-c^u\cdot(\delta/2)}+\left(\frac{1}{x(M_1)}-\frac{b^u}{a^l-c^u\cdot(\delta/2)}\right)\exp\left\{-\left(a^l-c^u\frac{\delta}{2}\right)(t-M_1)\right\}\right]^{-1}.$$

显然 $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = \dfrac{a^l-c^u\cdot(\delta/2)}{b^u}$. 再由 (6.2.17) 及比较定理知存在 $M_2>M_1$ 和 $M_3>M_2$, 使得当 $t\geqslant M_2$ 时有

$$x(t) > \frac{a^l-(3/4)c^u\delta}{b^u},\qquad \int_{-\infty}^{M_2-M_3.} h(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{b^u}{8a^l}\left[f\left(\frac{a^l}{b^u}\right)-d^u\right].$$

记 $\varepsilon = f\left(\dfrac{a^l}{b^u}\right) - d^u$, 则当 $t \geqslant M_3$ 时有

$$-d(t)+\int_{-\infty}^{t} K(s,t,x(s),x(t))\mathrm{d}s \geqslant -d^u+\int_{M_2}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l-(3/4)c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-(3/4)c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s, \tag{6.2.18}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s-\int_{M_2}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l-(3/4)c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-(3/4)c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2\int_{-\infty}^{M_2} h(s-t)\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\mathrm{d}s=\frac{2(a^l-c^u\delta)}{b^u}\int_{-\infty}^{M_2-t} h(s)\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2\frac{a^l}{b^u}\int_{-\infty}^{M_2-M_3} h(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\varepsilon}{4},\quad t\geqslant M_3.\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

由 (6.2.18), (6.2.19) 及引理 6.2.4 有

$$\begin{aligned}&-d(t)+\int_{-\infty}^{t} K(s,t,x(s),x(t))\mathrm{d}s\\ &\geqslant -d^u+\int_{-\infty}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s-\frac{\varepsilon}{4}\\ &\geqslant f\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)-d^u-\frac{\varepsilon}{4}\geqslant\frac{\varepsilon}{4},\quad t\geqslant M_3.\end{aligned}$$

于是当 $t \geqslant M_3$ 时有 $y'(t) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}y(t)$. 由此易证 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. 这与 (6.2.16) 矛盾. ∎

引理 6.2.6 对任意 $(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}\times\mathrm{int}\, B\mathscr{C}_h^+$ 有

$$\limsup_{t\to+\infty} x(\sigma,\varphi)(t) > \min\left\{\frac{d^l}{4l},\frac{a^l}{2b^u}\right\}. \tag{6.2.20}$$

证明 若 (6.2.20) 不成立, 则存在 $(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}\times\mathrm{int}\, B\mathscr{C}_h^+$, 使得

$$\limsup_{t\to+\infty} x(\sigma,\varphi)(t) \leqslant \min\left\{\frac{d^l}{4l},\frac{a^l}{2b^u}\right\}. \tag{6.2.21}$$

于是存在 $M_1 > \sigma$, 当 $t \geqslant M_1$ 时有 $x(t) = x(\sigma,\varphi)(t) < \dfrac{d^l}{4l}$, 从而有

$$y'(t)=y'(\sigma,\varphi)(t)\leqslant y(t)\left[-d^l+\left(\int_{-\infty}^{M_1}+\int_{M_1}^{t}\right)h(s-t)(x(s)+x(t))\mathrm{d}s\right]$$

$$\leqslant y(t)\left[-d^l+\left(\frac{a^u}{b^l}+|\varphi_1|\right)\int_{-\infty}^{M_1-t}h(s)\mathrm{d}s+\frac{d^l}{2}\right],\quad t\geqslant M_1.$$

存在 $M_2>M_1$, 使得

$$\left(\frac{a^u}{b^l}+|\varphi_1|\right)\int_{-\infty}^{M_1-M_2}h(s)\mathrm{d}s<\frac{d^l}{4}.$$

于是当 $t\geqslant M_2$ 时有

$$y'(t)\leqslant y(t)\left(-d^l+\frac{d^l}{4}+\frac{d^l}{2}\right)=-\frac{d^l}{4}y(t).$$

因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$, 从而对任意的 $0<\varepsilon<a^l$ 都存在 $M_3>\sigma$, 使得 $t\geqslant M_3$ 时有 $c^uy(t)<\varepsilon$. 故当 $t\geqslant M_3$ 时就有 $x'(t)\geqslant x(t)[a^l-b^ux(t)-\varepsilon]$. 由此易证存在 $M_4>M_3$, 当 $t\geqslant M_4$ 时有 $x(t)\geqslant\dfrac{2}{3}\dfrac{a^l-\varepsilon}{b^u}$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)\geqslant\dfrac{2}{3}\dfrac{a^l}{b^u}$. 由 (6.2.21) 得

$$\frac{2}{3}\frac{a^l}{b^u}>\frac{a^l}{2b^u}\geqslant\min\left\{\frac{d^l}{4l},\frac{a^l}{2b^u}\right\},$$

即 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)>\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)$. 矛盾! 引理证毕. ■

引理 6.2.7　*存在 $\xi>0$, 使得对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}\,B\mathscr{C}_h^+$ 有*

$$\liminf_{t\to+\infty}x(\sigma,\varphi)(t)\geqslant\xi.\tag{6.2.22}$$

证明　如果 (6.2.22) 不成立, 则存在 $(\sigma_n,\varphi^n)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}\,B\mathscr{C}_h^+$, 满足

$$\liminf_{t\to+\infty}x(\sigma_n,\varphi^n)(t)\leqslant\frac{\lambda}{n^2},$$

其中, $\lambda=\min\left\{\dfrac{d^l}{4l},\dfrac{a^l}{2b^u}\right\}$. 由引理 6.2.6 知存在

$$\sigma_n<\tau_1^{(n)}<t_1^{(n)}<\tau_2^{(n)}<t_2^{(n)}<\cdots<\tau_k^{(n)}<t_k^{(n)}<\cdots$$

满足

$$\begin{cases}\tau_k^{(n)}\to\infty,k\to+\infty;\quad x(\sigma_n,\varphi^n)(\tau_k^{(n)})=\dfrac{\lambda}{n},\quad x(\sigma_n,\varphi^n)(t_k^{(n)})=\dfrac{\lambda}{n^2},\\ \dfrac{\lambda}{n^2}<x(\sigma_n,\varphi^n)(t)<\dfrac{\lambda}{n},\quad t\in(\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}).\end{cases}\tag{6.2.23}$$

由引理 6.2.1 和引理 6.2.3 知存在 $M_1^{(n)}>\sigma_n$, 当 $t\geqslant M_1^{(n)}$ 时有

$$x(\sigma_n,\varphi^n)(t)<\frac{2a^u}{b^l},\quad y(\sigma_n,\varphi^n)(t)<2T.\tag{6.2.24}$$

于是存在 $N_1^{(n)}>0$, 当 $k\geqslant N_1^{(n)}$ 时有 $\tau_k^{(n)}\geqslant M_1^{(n)}$, 故当 $t\in[\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}]$ 时 (6.2.24) 成立, 因而有

$$x'(\sigma_n,\varphi^n)(t)\geqslant x(\sigma_n,\varphi^n)(t)\left(-b^u\frac{2a^u}{b^l}-c^u\dot{2}T\right):=-\beta x(\sigma_n,\varphi^n)(t).$$

于是当 $k\geqslant N_1^{(n)}$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{n^2}=x(\sigma_n,\varphi^n)(t_k^{(n)})&\geqslant x(\sigma_n,\varphi^n)(\tau_k^{(n)})\exp\{-\beta(t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)})\}\\&=\frac{\lambda}{n}\exp\{-\beta(t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)})\}.\end{aligned}$$

由此得

$$t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}\geqslant\frac{\ln n}{\beta},\quad k\geqslant N_1^{(n)},\tag{6.2.25}$$

于是有

$$\begin{aligned}y'(\sigma_n,\varphi^n)(t)\leqslant y(\sigma_n,\varphi^n)(t)&\left[-d^l+\left(\int_{-\infty}^{\sigma_n}+\int_{\sigma_n}^{M_1^{(n)}}+\int_{M_1^{(n)}}^{\tau_k^{(n)}}+\int_{\tau_k^{(n)}}^{t}\right)h(s-t)x(\sigma_n,\varphi^n)(s)\mathrm{d}s\right.\\&\left.+\int_{-\infty}^{t}h(s-t)x(\sigma_n,\varphi^n)(t)\mathrm{d}s\right],\quad k\geqslant N_1^{(n)},\quad t\geqslant\tau_k^{(n)}.\end{aligned}\tag{6.2.26}$$

当 $k\geqslant N_1^{(n)},t\in[\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}]$ 时有

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\sigma_n}h(s-t)x(\sigma_n,\varphi^n)(s)\mathrm{d}s\leqslant|\varphi_1^n|\int_{-\infty}^{\sigma_n-t}h(s)\mathrm{d}s,\\ \displaystyle\int_{\sigma_n}^{M_1^{(n)}}h(s-t)x(\sigma_n,\varphi^n)(s)\mathrm{d}s\leqslant N^{(n)}\int_{-\infty}^{M_1^{(n)}-t}h(s)\mathrm{d}s,\\ \displaystyle\int_{M_1^{(n)}}^{\tau_k^{(n)}}h(s-t)x(\sigma_n,\varphi^n)(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{2a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{\tau_k^{(n)}-t}h(s)\mathrm{d}s,\\ \displaystyle\int_{\tau_k^{(n)}}^{t}h(s-t)x(\sigma_n,\varphi^n)(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\lambda l}{n},\end{cases}\tag{6.2.27}$$

其中, $N^{(n)} = \max\limits_{\sigma_n \leqslant s \leqslant M_1^{(n)}} x(\sigma_n, \varphi^n)(s)$. 对固定的 n, 存在 $N_2^{(n)} > N_1^{(n)}$, 使得当 $k \geqslant N_2^{(n)}$ 时有

$$|\varphi_1^n| \int_{-\infty}^{\sigma_n - \tau_k^{(n)}} h(s)\mathrm{d}s < \frac{d^l}{5}, \quad N^{(n)} \int_{-\infty}^{M_1^{(n)} - \tau_k^{(n)}} h(s)\mathrm{d}s < \frac{d^l}{5}. \tag{6.2.28}$$

存在 $L_1, L_2 > 0$, 分别使得

$$\frac{2a^u}{b^l} \int_{-\infty}^{-L_1} h(s)\mathrm{d}s < \frac{d^l}{5}, \quad 2T\exp\left\{-\frac{d^l}{5}L_2\right\} < \frac{a^l}{3c^u}. \tag{6.2.29}$$

由 (6.2.25) 可选取 $n_0 > 0$ 充分大, 使得当 $n \geqslant n_0$ 时有

$$t_k^{(n)} - \tau_k^{(n)} > 2(L_1 + L_2), \quad \frac{2\lambda l}{n} < \frac{d^l}{5}, \quad \frac{\lambda}{n} < \frac{a^l}{3b^u}, \quad \frac{b^u\lambda}{n} < \frac{a^l}{3c^u}. \tag{6.2.30}$$

当 $n \geqslant n_0, k \geqslant N_2^{(n)}, t \in [\tau_k^{(n)} + L_1, t_k^{(n)}]$ 时, 由 (6.2.26)~(6.2.29) 有

$$y'(\sigma_n, \varphi^n)(t) \leqslant -\frac{d^l}{5} y(\sigma_n, \varphi^n)(t),$$

从而再由 (6.2.24) 得到

$$y(\sigma_n, \varphi^n)(t) \leqslant 2T\exp\left\{-\frac{d^l}{5}(t - \tau_k^{(n)} - L_1)\right\}.$$

由 (6.2.29) 知当 $n \geqslant n_0, k \geqslant N_2^{(n)}, t \in [\tau_k^{(n)} + L_1 + L_2, t_k^{(n)}]$ 时有

$$y(\sigma_n, \varphi^n)(t) \leqslant 2T\exp\left\{-\frac{d^l}{5}L_2\right\} < \frac{a^l}{3c^u}, \tag{6.2.31}$$

再由 (6.2.30), (6.2.31) 得到

$$\begin{aligned} x'(\sigma_n, \varphi^n)(t) &> x(\sigma_n, \varphi^n)(t)[a^l - b^u x(\sigma_n, \varphi^n)(t) - c^u y(\sigma_n, \varphi^n)(t)] \\ &> x(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[a^l - b^u\frac{\lambda}{n} - c^u\frac{a^l}{3c^u}\right] \geqslant \frac{a^l}{3}x(\sigma_n, \varphi^n)(t) > 0, \end{aligned}$$

由此推得

$$x(\sigma_n, \varphi^n)(t_k^{(n)}) > x(\sigma_n, \varphi^n)(\tau_k^{(n)} + L_1 + L_2) > \frac{\lambda}{n^2}.$$

这与 (6.2.23) 矛盾! ∎

引理 6.2.8　*若 (H_3) 成立, 则存在 $\eta > 0$, 使得对任意 $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathrm{int}\, B\mathscr{C}_h^+$ 有*

$$\liminf_{t \to +\infty} y(\sigma, \varphi)(t) > \eta.$$

证明与引理 6.2.3 和引理 6.2.7 证明类似, 此处从略.

由引理 6.2.1、引理 6.2.3、引理 6.2.7、引理 6.2.8, 可以断言

定理 6.2.1 如果 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$ 成立, 则系统 (6.2.1) 是一致持久的.

定义函数 $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 如下:

$$g(\alpha)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{t}K(s,t,\alpha,\alpha)\mathrm{d}s,$$

显然 $g(\alpha)$ 是单调增加的.

定理 6.2.2 假设 (H_1) 和 (H_2) 成立且

(H_4) 对任意的 $0<\varepsilon<\dfrac{a^u}{b^l}$, 存在 $q(\varepsilon)>0$, 使得

$$g\left(\frac{a^u}{b^l}\right)\leqslant d^l,\quad \int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^u}{b^l},\frac{a^u}{b^l}\right)\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^u}{b^l}-\varepsilon,\frac{a^u}{b^l}-\varepsilon\right)\mathrm{d}s>q(\varepsilon),$$

则系统 (6.2.1) 是非持久的.

证明 用反证法. 若系统 (6.2.1) 是持久的, 则对 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times\mathrm{int}\,B\mathscr{C}_h^+$, 存在 $\delta_1>0$ 和 $M_1>0$ (δ_1 和 M_1 依赖于 (σ,φ)), 使得 $y(t)=y(\sigma,\varphi)(t)>2\delta_1, t\geqslant M_1$. 于是有

$$x'(t)=x'(\sigma,\varphi)(t)<x(t)(a^u-b^lx(t)-2c^l\delta_1),\quad t\geqslant M_1.$$

若 $a^u-2c^l\delta_1\leqslant 0$, 则易证

$$x(t)\leqslant[b^l(t-M_1)+x^{-1}(M_1)]^{-1},\quad t\geqslant M_1.$$

由此推得, $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$, 这与系统 (6.2.1) 是持久的假定相矛盾.

若 $a^u-2c^l\delta_1>0$, 由比较定理易证

$$x(t)\leqslant\left[\frac{b^l}{a^u-2c^l\delta_1}+\left(\frac{1}{x(M_1)}-\frac{b^l}{a^u-2c^l\delta_1}\right)\exp\{-(a^u-2c^l\delta_1)(t-M_1)\}\right]^{-1},\quad t\geqslant M_1.$$

由此知存在 $M_2>M_1$, 当 $t\geqslant M_2$ 时有

$$x(t)\leqslant\frac{a^u-c^l\delta_1}{b^l}.\tag{6.2.32}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^u}{b^l},\frac{a^u}{b^l}\right)\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^u-c^l\delta_1}{b^l},\frac{a^u-c^l\delta_1}{b^l}\right)\mathrm{d}s\geqslant q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right),$$

$$g\left(\frac{a^u}{b^l}\right)\geqslant\int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^u-c^l\delta_1}{b^l},\frac{a^u-c^l\delta_1}{b^l}\right)\mathrm{d}s+q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right),$$

故有

$$g\left(\frac{a^u}{b^l}\right) \geqslant g\left(\frac{a^u - c^l\delta_1}{b^l}\right) + q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right). \tag{6.2.33}$$

存在 $M_3 > M_2$, 使得

$$\left(|\varphi_1| + N + \frac{a^u - c^l\delta_1}{b^l}\right) \int_{-\infty}^{M_1 - M_3} h(s)\mathrm{d}s < \frac{1}{4}q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right), \tag{6.2.34}$$

其中, $N = \max\limits_{\sigma \leqslant s \leqslant M_2} x(s)$. 于是当 $t \geqslant M_3$ 时, 由 (6.2.32), (6.2.34) 有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{t} K(s, t, x(s), x(t))\,\mathrm{d}s \\
\leqslant& \left(\int_{-\infty}^{\sigma} + \int_{\sigma}^{M_2}\right) h(s-t)[x(s) + x(t)]\mathrm{d}s + \int_{M_2}^{t} K(s, t, x(s), x(t))\mathrm{d}s \\
\leqslant& \left(|\varphi_1| + \frac{a^u - c^l\delta_1}{b^l}\right) \int_{-\infty}^{\sigma - t} h(s)\mathrm{d}s + \left(N + \frac{a^u - c^l\delta_1}{b^l}\right) \int_{-\infty}^{M_2 - t} h(s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_{M_2}^{t} K\left(s, t, \frac{a^u - c^l\delta_1}{b^l}, \frac{a^u - c^l\delta_1}{b^l}\right)\mathrm{d}s \\
\leqslant& \frac{1}{2}q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right) + g\left(\frac{a^u - c^l\delta_1}{b^l}\right).
\end{aligned}$$

再由 (6.2.33) 有

$$\int_{-\infty}^{t} K(s, t, x(s), x(t))\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right) + g\left(\frac{a^u}{b^l}\right) - q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right) = g\left(\frac{a^u}{b^l}\right) - \frac{1}{2}q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right).$$

于是当 $t \geqslant M_3$ 时, 由 (H_4) 有

$$y'(t) \leqslant y(t)\left[-d^l + g\left(\frac{a^u}{b^l}\right) - \frac{1}{2}q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right)\right] \leqslant -\frac{1}{2}q\left(\frac{c^l\delta_1}{b^l}\right)y(t),$$

因而 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, 这与系统 (6.2.1) 是持久的假定相矛盾. ∎

定理 6.2.3　*假设* (H_1), (H_2) *和* (H_4) *成立, 则对任意的* $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathrm{int}\, B\mathscr{C}_h^+$ *必有*

$$\liminf_{t\to+\infty} y(\sigma, \varphi)(t) = 0. \tag{6.2.35}$$

证明 由定理 6.2.2 知系统 (6.2.1) 是非持久的. 由定义 6.2.1、引理 6.2.1、引理 6.2.3 和引理 6.2.7 知, 必存在 $(\sigma_0, \varphi_0) \in \mathbb{R} \times \text{int } B\mathscr{C}_h^+$, 使得 $\liminf\limits_{t\to+\infty} y(\sigma_0, \varphi_0)(t) = 0$. 假如存在 $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R} \times \text{int } B\mathscr{C}_h^+$, 使得 $\liminf\limits_{t\to+\infty} y(\sigma, \varphi)(t) > 0$, 则类似定理 6.2.2 的证明即可导出矛盾, 因而 (6.2.35) 成立. ∎

在上面讨论的基础上, 对于系统 (6.2.1) 的自治情形, 可以得到更漂亮的结果.

考虑下面的自治的卷积型捕食者-食饵系统:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a - bx(t) - cy(t)], \\ y'(t) = y(t)\left[-d + \int\limits_{-\infty}^{t} h(s-t)F(x(s), x(t))\mathrm{d}s\right]. \end{cases} \tag{6.2.36}$$

定理 6.2.4 假设

(i) $h: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$ 可测, 满足 $\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s < \infty$;

(ii) $F: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 对两个变元都是严格单调增加的且满足 Lipschitz 条件;

(iii) $a, b, c, d > 0$,

则系统 (6.2.36) 是一致持久的当且仅当

(iv)

$$F\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right)\int\limits_{-\infty}^{0} h(s)\mathrm{d}s > d.$$

若 (i), (ii), (iii) 成立, 但 (iv) 不成立, 则对任意的 $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R} \times \text{int } B\mathscr{C}_h^+$ 有 $\liminf\limits_{t\to+\infty} y(\sigma, \varphi)(t) = 0$.

注 6.2.1 文献 [160] 应用本节的方法研究了由多个食饵和一个捕食者所构成的系统的持久性. 近年来, 生物动力学系统、传染病动力学系统的持久性研究取得了长足的进展, 涌现出了许多新的研究成果, 可参见文献 [27, 116, 119, 140, 141, 142, 186], 此处不作一一介绍.

6.3 非自治捕食者-食饵系统的周期解的存在性

考虑具无穷时滞的非自治、非卷积型捕食者-食饵系统

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t) - c(t)y(t)], \\ y'(t) = y(t)\left[-d(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} K(s, t, x(s), x(t))\mathrm{d}s\right], \end{cases} \tag{6.3.1}$$

其中,

(A_1) $K:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 可测, $K(s,t,x,y)$ 关于 x,y 单调增加, 满足

$$K(s,t,0,0)\equiv 0,\quad K(s+\omega,t+\omega,x,y)\equiv K(s,t,x,y),\quad \omega>0$$

且存在正连续函数 $h:\mathbb{R}^-\to\mathbb{R}^+$, $\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s=l<+\infty$, 使得

$$|K(s,t,x,y)-K(s,t,\bar{x},\bar{y})|\leqslant h(s-t)(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|);$$

(A_2) $a,b,c,d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是正的连续的周期为 ω 的周期函数;

(A_3) $\int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^l}{b^u},\frac{a^l}{b^u}\right)\mathrm{d}s>d^u,\quad t\in\mathbb{R}.$

设 $(x(\sigma,\varphi)(t),y(\sigma,\varphi)(t))$ 为方程 (6.3.1) 满足初始条件 $x_\sigma=\varphi_1,y_\sigma=\varphi_2$ 的解, 其中 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathrm{int}BC^+=\{\varphi\in BC(\mathbb{R}^-,\mathbb{R}^2)|\varphi_i(s)>0,s\leqslant 0,i=1,2\}$.

与 6.2 节类似, 可以证明如下引理:

引理 6.3.1 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC^+$ 有

$$\limsup_{t\to+\infty}x(\sigma,\varphi)(t)\leqslant\frac{a^u}{b^l}.$$

引理 6.3.2 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则存在 $T>0$, 使得

$$\limsup_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)\leqslant T,$$

其中, T 与 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC^+$ 的选取无关.

引理 6.3.3 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则存在 $\xi>0$, 使得

$$\liminf_{t\to+\infty}x(\sigma,\varphi)(t)\geqslant\xi,$$

其中, ξ 与 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC^+$ 的选取无关.

引理 6.3.4 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则存在 $\eta>0$, 使得

$$\liminf_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)\geqslant\eta,$$

其中, η 与 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC^+$ 的选取无关.

引理 6.3.5 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC^+$ 有

$$\liminf_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)\leqslant\frac{a^u}{c^l}.$$

引理 6.3.6 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC^+$ 有

$$\limsup_{t\to+\infty}x(\sigma,\varphi)(t)>\min\left\{\frac{d^l}{4l},\frac{a^l}{2b^u}\right\}.$$

定义函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$,

$$f(a)=\inf_{t\geqslant 0}\int_{-\infty}^{t}K(s,t,a,a)\mathrm{d}s.$$

显然, $f(a)$ 是单调增加函数.

引理 6.3.7 设条件 (A_3) 成立, 如果 $f\left(\frac{a^l}{b^u}\right)>d^u$, 则存在 $\delta>0$, 使得

$$f\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)>d^u.$$

引理 6.3.8 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则对任意 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC^+$ 有

$$\limsup_{t\to+\infty}y(\sigma,\varphi)(t)\geqslant\frac{\delta}{2}.$$

定义函数 $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$,

$$f_n(a)=\inf_{t\geqslant 0}\int_{t-n\omega}^{t}K(s,t,a,a)\mathrm{d}s.$$

引理 6.3.9 设条件 (A_3) 成立, 则存在 $n_0>0$, 使得当 $n>n_0$ 时,

$$f_n\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)>d^u.$$

证明 由引理 6.3.7, 可设

$$f\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)-d^u=\varepsilon>0.$$

于是

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t}K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s-\int_{t-n\omega}^{t}K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s\\=&\int_{\infty}^{t-n\omega}K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s\leqslant 2\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\int_{-\infty}^{-n\omega}h(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

则存在 $n_0>0$, 使得当 $n>n_0$ 时有

$$\int_{-\infty}^{-n\omega} h(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{b^u\varepsilon}{4(a^l - c^u\delta)}.$$

于是

$$\int_{\infty}^{t} K\left(s, t, \frac{a^l - c^u\delta}{b^u}, \frac{a^l - c^u\delta}{b^u}\right) \mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{t-n\omega}^{t} K\left(s, t, \frac{a^l - c^u\delta}{b^u}, \frac{a^l - c^u\delta}{b^u}\right) \mathrm{d}s,$$

进而

$$f\left(\frac{a^l - c^u\delta}{b^u}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + f_n\left(\frac{a^l - c^u\delta}{b^u}\right),$$

因此

$$f_n\left(\frac{a^l - c^u\delta}{b^u}\right) - d^u \geqslant f\left(\frac{a^l - c^u\delta}{b^u}\right) - \frac{\varepsilon}{2} - d^u = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

证毕. ∎

考虑伴随方程

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t) - c(t)y(t)], \\ y'(t) = y(t)\left[-d(t) + \displaystyle\int_{t-n\omega}^{t} K(s, t, x(s), x(t))\mathrm{d}s\right]. \end{cases} \tag{6.3.2}$$

令

$$K_1(s, t, x, y) = \begin{cases} K(s, t, x, y), & s \geqslant t - n\omega, \\ 0, & s < t - n\omega, \end{cases}$$

则方程 (6.3.2) 即是

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t) - c(t)y(t)], \\ y'(t) = y(t)\left[-d(t) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t} K_1(s, t, x(s), x(t))\mathrm{d}s\right]. \end{cases} \tag{6.3.3}$$

容易证明, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 函数 K_1, a, b, c, d 满足条件 (A_1) 和 (A_2). 由引理 6.3.9, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 方程 (6.3.3) 满足条件 (A_3). 因此, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 引理 6.3.1~ 引理 6.3.8 对于方程 (6.3.3) 仍然成立.

令

$$BC_n = BC([-n\omega, 0], \mathbb{R}^2),$$
$$\mathrm{int}BC_n^+ = \{\varphi \in BC_n | \varphi_1(s) > 0, \varphi_2(s) > 0, s \in [-n\omega, 0]\}.$$

设 $(x(\sigma_n, \varphi^n)(t), y(\sigma_n, \varphi^n)(t))$ 表示方程 (6.3.2) 满足初始条件

$$x_{\sigma_n} = \varphi_1^n, \quad y_{\sigma_n} = \varphi_2^n$$

的解, 其中, $(\sigma_n, \varphi^n) \in \mathbb{R}^+ \times BC_n$.

引理 6.3.10 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, 则存在 $T^*>0$(与 n 无关), 使得对任意 $(\sigma_n,\varphi^n)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC_n^+$, $n=1,2,\cdots$, $n\geqslant n_0$ 有

$$\limsup_{t\to+\infty} y(\sigma_n,\varphi^n)(t)\leqslant T^*. \tag{6.3.4}$$

证明 由于方程 (6.3.2) 与 n 有关, 此引理并不能由引理 6.3.2 直接得到. 由引理 6.3.5 有

$$\liminf_{t\to+\infty} y(\sigma_n,\varphi_n)(t)\leqslant\frac{a^u}{c^l}.$$

假设 (6.3.4) 不成立, 则存在 $(\sigma_n,\varphi^n)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC_n^+$, $n\geqslant n_0$, $\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}$, $k=1,2,\cdots$, $\sigma_n\leqslant\tau_k^{(n)}<t_k^{(n)}$, $\tau_k^{(n)}\to+\infty$, $k\to+\infty$, 使得

$$\begin{cases} y(\sigma_n,\varphi^n)(\tau_k^{(n)})=\dfrac{2a^u}{c^l}, \quad y(\sigma_n,\varphi^n)(t_k^{(n)})=n+\dfrac{2a^u}{c^l},\\ \dfrac{2a^u}{c^l}<y(\sigma_n,\varphi^n)(t)<n+\dfrac{2a^u}{c^l}, \quad t\in(\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}).\end{cases} \tag{6.3.5}$$

由引理 6.3.1, 存在 $M_1^{(n)}\geqslant\sigma_n$, 使得当 $t\geqslant M_1^{(n)}$ 时有

$$x(\sigma_n,\varphi^n)(t)\leqslant\frac{2a^u}{b^l}.$$

又存在 $K_1^{(n)}>0$, 使得当 $k\geqslant K_1^{(n)}$ 时有 $\tau_k^{(n)}>M_1^{(n)}+n\omega$. 当 $k\geqslant K_1^{(n)}$, $t\geqslant\tau_k^{(n)}$ 时有

$$\begin{aligned} y'(\sigma_n,\varphi^n)(t)&\leqslant y(\sigma_n,\varphi^n)(t)\int_{t-n\omega}^{t} h(s-t)(x(\sigma_n,\varphi^n)(s)+x(\sigma_n,\varphi^n)(t))\mathrm{d}s\\ &\leqslant y(\sigma_n,\varphi^n)(t)\int_{\tau_k^{(n)}-n\omega}^{t} h(s-t)\frac{4a^u}{b^l}\mathrm{d}s\\ &\leqslant\frac{4a^u}{b^l}y(\sigma_n,\varphi^n)(t):=\alpha y(\sigma_n,\varphi^n)(t). \end{aligned} \tag{6.3.6}$$

于是

$$y(\sigma_n,\varphi^n)(t)\leqslant y(\sigma_n,\varphi^n)(\tau_k^{(n)})\mathrm{e}^{\alpha(t-\tau_k^{(n)})}=\frac{2a^u}{c^l}\mathrm{e}^{\alpha(t-\tau_k^{(n)})},$$

故

$$t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}\geqslant\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{nc^l}{2a^u}+1\right). \tag{6.3.7}$$

另一方面, 当 $k\geqslant K_1^{(n)},t\in[\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}]$ 时有

$$x'(\sigma_n,\varphi^n)(t)\leqslant x(\sigma_n,\varphi^n)(t)\left[a^u-c^l\frac{2a^u}{c^l}\right]=-a^u x(\sigma_n,\varphi^n)(t),$$

所以, 当 $n \geqslant n_0, k \geqslant K_1^{(n)}, t \in [\tau_k^{(n)}, t_k^{(n)}]$ 时有

$$x(\sigma_n, \varphi^n)(t) \leqslant x(\sigma_n, \varphi^n)(\tau_k^{(n)}) \mathrm{e}^{-a^u(t-\tau_k^{(n)})} \leqslant \frac{2a^u}{b^l} \mathrm{e}^{-a^u(t-\tau_k^{(n)})}. \tag{6.3.8}$$

显然存在 $L_1 > 0$, 使得

$$\frac{2a^u}{b^l} \mathrm{e}^{-a^u L_1} < \frac{d^l}{8l}; \tag{6.3.9}$$

存在 $L_2 > L_1$, 使得

$$\frac{4a^u}{b^l} \int_{-\infty}^{L_1 - L_2} h(s) \mathrm{d}s < \frac{d^l}{4}. \tag{6.3.10}$$

由 (6.3.7) 知存在 $n_1 > 0$, 使得当 $n \geqslant n_1$ 时, $t_k^{(n)} - \tau_k^{(n)} \geqslant 2(L_1 + L_2)$. 由 (6.3.8), (6.3.9) 知当 $n \geqslant n_1, k \geqslant K_1^{(n)}, t \in (\tau_k^{(n)} + L_2, t_k^{(n)})$ 时有

$$\begin{aligned}
y'(\sigma_n, \varphi^n)(t) &\leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(t) \left[-d^l + \int_{t-n\omega}^{t} h(s-t)(x(\sigma_n, \varphi^n)(s) + x(\sigma_n, \varphi^n)(t)) \mathrm{d}s \right] \\
&\leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(t) \left[-d^l + \int_{-\infty}^{\tau_k^{(n)} + L_1} h(s-t) \frac{4a^u}{b^l} \mathrm{d}s + \int_{\tau_k^{(n)} + L_1}^{t} h(s-t) \frac{d^l}{4l} \mathrm{d}s \right] \\
&\leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(t) \left[-d^l + \int_{-\infty}^{L_1 - L_2} h(s) \frac{4a^u}{b^l} \mathrm{d}s + \frac{d^l}{4} \right] \\
&\leqslant -\frac{d^l}{2} y(\sigma_n, \varphi^n)(t).
\end{aligned}$$

因此, 当 $n \geqslant n_1$, $k \geqslant K_1^{(n)}$ 时有

$$n + \frac{2a^u}{c^l} = y(\sigma_n, \varphi^n)(t_k^{(n)}) < y(\sigma_n, \varphi^n)(\tau_k^{(n)} + L_2) < n + \frac{2a^u}{c^l}.$$

显然矛盾. 定理证毕. ∎

引理 6.3.11　设 $(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_3)$ 成立, 则存在 $\xi^* > 0$(与 n 无关), 使得对任意 $(\sigma_n, \varphi^n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{int}BC_n^+$, $n = 1, 2, \cdots, n \geqslant n_0$ 有

$$\liminf_{t \to +\infty} x(\sigma_n, \varphi^n)(t) \geqslant \xi^*. \tag{6.3.11}$$

证明　由引理 6.3.6 知, 对任意 $(\sigma_n, \varphi^n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{int}BC_n^+$, $n = 1, 2, \cdots, n \geqslant n_0$ 有

$$\limsup_{t \to +\infty} x(\sigma_n, \varphi^n)(t) \geqslant \min\left\{ \frac{d^l}{4l}, \frac{a^l}{2b^u} \right\} := \lambda.$$

存在 $\lambda_1 < \lambda$, 使得

$$2\lambda_1 l < \frac{d^l}{3}, \quad b^u\lambda_1 < \frac{a^l}{3}. \tag{6.3.12}$$

选取两个正数序列 α_n, β_n 满足对任意的 n, $1 > \alpha_n > \beta_n$ 且当 $n \to \infty$, $\alpha_n \to 1, \beta_n \to 0$. 存在 $n_1 > n_0$, 使得当 $n \geqslant n_1$ 时, $\alpha_n > 1/2$, $\alpha_n\lambda_1 > \beta_n\lambda$.

若 (6.3.11) 不成立, 则存在 $(\sigma_n, \varphi^n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{int}BC_n^+$, $n \geqslant n_1$, 和 $\tau_k^{(n)}, t_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \cdots$, 满足 $\sigma_n \leqslant \tau_k^{(n)} < t_k^{(n)}$, $\tau_k^{(n)} \to +\infty$, $k \to +\infty$, 使得

$$\begin{cases} x(\sigma_n, \varphi^n)(\tau_k^{(n)}) = \alpha_n\lambda_1, \quad x(\sigma_n, \varphi^n)(t_k^{(n)}) = \beta_n\lambda, \\ \beta_n\lambda < x(\sigma_n, \varphi^n)(t) < \alpha_n\lambda_1, \quad t \in (\tau_k^{(n)}, t_k^{(n)}). \end{cases} \tag{6.3.13}$$

由引理 6.3.1 和引理 6.3.2 知存在 $M_1^{(n)} \geqslant \sigma_n$, 使得当 $t \geqslant M_1^{(n)}$ 时有

$$x(\sigma_n, \varphi^n)(t) < \frac{2a^u}{b^l}, \quad y(\sigma_n, \varphi^n)(t) < 2T. \tag{6.3.14}$$

故存在 $K_1^{(n)} > 0$, 使得当 $k \geqslant K_1^{(n)}$ 时, $\tau_k^{(n)} \geqslant M_1^{(n)} + n\omega$. 于是当 $n \geqslant n_1, k \geqslant K_1^{(n)}, t \geqslant \tau_k^{(n)}$ 时有

$$x'(\sigma_n, \varphi^n)(t) \geqslant x(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[-b^u\frac{2a^u}{b^l} - c^u \cdot 2T\right] := -\beta x(\sigma_n, \varphi^n)(t),$$

从而

$$x(\sigma_n, \varphi^n)(t) \geqslant x(\sigma_n, \varphi^n)(\tau_k^{(n)})\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau_k^{(n)})} \geqslant \frac{\lambda_1}{2}\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau_k^{(n)})}.$$

由此推得

$$t_k^{(n)} - \tau_k^{(n)} \geqslant \frac{1}{\beta}\ln\left\{\frac{\lambda_1}{2\beta_n\lambda}\right\}, \quad n \geqslant n_1, k \geqslant K_1^{(n)}. \tag{6.3.15}$$

又当 $n \geqslant n_1, k \geqslant K_1^{(n)}, t \geqslant \tau_k^{(n)}$ 时有

$$\begin{aligned} y'(\sigma_n, \varphi^n)(t) &\leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[-d^l + \int_{t-n\omega}^{t} h(s-t)(x(\sigma_n, \varphi^n)(s) + x(\sigma_n, \varphi^n)(t))\mathrm{d}s\right] \\ &\leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[-d^l + \frac{4a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{\tau_k^{(n)}} h(s-t)\mathrm{d}s + 2\alpha_n\lambda_1\int_{\tau_k^{(n)}}^{t} h(s-t)\mathrm{d}s\right] \\ &\leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[-d^l + \frac{4a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{\tau_k^{(n)}-t} h(s)\mathrm{d}s + 2\lambda_1 l\right] \\ &\leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[-\frac{2}{3}d^l + \frac{4a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{\tau_k^{(n)}-t} h(s)\mathrm{d}s\right]. \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

存在 $L_1 > 0$, 使得

$$\frac{4a^u}{b^l}\int_{-\infty}^{-L_1} h(s)\mathrm{d}s < \frac{d^l}{3}. \tag{6.3.17}$$

由 (6.3.17) 知存在 $n_2 > n_1$, 使得当 $n \geqslant n_2$ 时有

$$t_k^{(n)} - \tau_k^{(n)} \geqslant 2L_1.$$

由 (6.3.16) 和 (6.3.17) 知当 $n \geqslant n_2, k \geqslant K_1^{(n)}, t \in [\tau_k^{(n)} + L_1, t_k^{(n)}]$ 时有

$$y'(\sigma_n, \varphi^n)(t) \leqslant -\frac{d^l}{3} y(\sigma_n, \varphi^n)(t),$$

于是

$$y(\sigma_n, \varphi^n)(t) \leqslant y(\sigma_n, \varphi^n)(\tau_k^{(n)} + L_1)\mathrm{e}^{-\frac{d^l}{3}(t-\tau_k^{(n)}-L_1)} \leqslant 2T\mathrm{e}^{-\frac{d^l}{3}(t-\tau_k^{(n)}-L_1)}. \tag{6.3.18}$$

又存在 $L_2 > 0$, 使得

$$2T\mathrm{e}^{-\frac{d^l}{3}L_2} < \frac{a^l}{3c^u}. \tag{6.3.19}$$

存在 $n_3 > n_2$, 使得当 $n \geqslant n_3$ 时, $t_k^{(n)} - \tau_k^{(n)} \geqslant 2(L_1 + L_2)$. 由 (6.3.18) 和 (6.3.19) 知当 $n \geqslant n_3, k \geqslant K_1^{(n)}, t \in [\tau_k^{(n)} + L_1 + L_2,\ t_k^{(n)}]$ 时有

$$y(\sigma_n, \varphi^n)(t) \leqslant \frac{a^l}{3c^u}.$$

由 (6.3.12) 知当 $n \geqslant n_3, k \geqslant K_1^{(n)}, t \in [\tau_k^{(n)} + L_1 + L_2,\ t_k^{(n)}]$ 时有

$$\begin{aligned} x'(\sigma_n, \varphi^n)(t) &\geqslant x(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[a^l - b^u\alpha_n\lambda_1 - c^u\frac{a^l}{3c^u}\right] \\ &\geqslant \frac{a^l}{3}x(\sigma_n, \varphi^n)(t) > 0. \end{aligned}$$

因此, 当 $n \geqslant n_3, k \geqslant K_1^{(n)}$ 时有

$$x(\sigma_n, \varphi^n)(t_k^{(n)}) = \beta_n\lambda > x(\sigma_n, \varphi^n)(\tau_k^{(n)} + L_1 + L_2),$$

与式 (6.3.13) 矛盾. 定理证毕. ∎

引理 6.3.12 设 $(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_3)$ 成立, 则存在 $\eta^* > 0$(与 n 无关), 使得任意 $(\sigma_n, \varphi^n) \in \mathbb{R}^+ \times \mathrm{int}BC_n^+$, $n = 1, 2, \cdots, n \geqslant n_0$ 有

$$\liminf_{t\to+\infty}(\sigma_n, \varphi^n)(t) \geqslant \eta^*. \tag{6.3.20}$$

证明 由引理 6.3.8 有

$$\limsup_{t\to+\infty} y(\sigma_n,\varphi^n)(t) \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

由引理 6.3.7 易知 δ 与 n 的选取无关. 由引理 6.3.9, 可以选取 δ, 使得

$$f_n\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right) > d^u. \tag{6.3.21}$$

选取两个正数序列 α_n 和 β_n, 满足 $1>\alpha_n>\beta_n$ 且当 $n\to\infty$ 时, $\alpha_n\to1,\beta_n\to0$. 于是存在 $n_1>n_0$, 使得当 $n\geqslant n_1$ 时有 $\alpha_n>\dfrac{1}{2}$.

如果 (6.3.20) 不成立, 则存在 $(\sigma_n,\varphi^n)\in\mathbb{R}^+\times\mathrm{int}BC_n^+$, $n\geqslant n_1$ 及满足 $\sigma_n\leqslant\tau_k^{(n)}<t_k^{(n)}$, $\tau_k^{(n)}\to+\infty$, $k\to+\infty$ 的 $\tau_k^{(n)},t_k^{(n)},k=1,2,\cdots$, 使得

$$\begin{cases} y(\sigma_n,\varphi^n)(\tau_k^{(n)})=\dfrac{\alpha_n\delta}{4}, \quad y(\sigma_n,\varphi^n)(t_k^{(n)})=\dfrac{\beta_n\delta}{4}, \\ \dfrac{\beta_n\delta}{4}<y(\sigma_n,\varphi^n)(t)<\dfrac{\alpha_n\delta}{4}, \quad t\in(\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}). \end{cases} \tag{6.3.22}$$

因为

$$y'(\sigma_n,\varphi^n)(t)\geqslant -d^u y(\sigma_n,\varphi^n)(t), \quad t\geqslant\sigma_n,$$

于是, 当 $n\geqslant n_1$ 时有

$$y(\sigma_n,\varphi^n)(t)\geqslant y(\sigma_n,\varphi^n)(\tau_k^{(n)})\mathrm{e}^{-d^u(t-\tau_k^{(n)})}\geqslant\frac{\delta}{8}\mathrm{e}^{-d^u(t-\tau_k^{(n)})}.$$

由此推得

$$t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}\geqslant\frac{1}{d^u}\ln\left(\frac{1}{2\beta_n}\right). \tag{6.3.23}$$

考虑方程

$$y'(t)=y(t)\left(a^l-b^u y(t)-c^u\frac{\delta}{4}\right), \quad y(\sigma)=\frac{\alpha_n\delta}{4}.$$

由 δ 的定义知 $a^l-c^u\delta/4>a^l-c^u\delta>0$. 经过简单计算可得

$$y(t)=\left[\frac{b^u}{a^l-c^u\delta/4}+\left(\frac{1}{y(\sigma)}-\frac{b^u}{a^l-c^u\delta/4}\right)\mathrm{e}^{-(a^l-c^u\delta/4)(t-\sigma)}\right]^{-1}.$$

易见

$$y(t)\to\frac{a^l-c^u\delta/4}{b^u}, \quad t\to+\infty.$$

所以, 存在 $L_1>0$, 使得当 $t\geqslant\sigma+L_1$ 时有

$$y(t)\geqslant\frac{a^l-c^u\delta/2}{b^u}. \tag{6.3.24}$$

由 (6.3.23), 存在 $n_2 > n_1$, 使得当 $n \geqslant n_2$ 时有

$$t_k^{(n)} - \tau_k^{(n)} \geqslant 2L_1.$$

因此, 当 $n \geqslant n_2, t \in [\tau_k^{(n)}, t_k^{(n)}]$ 时有

$$x'(\sigma_n, \varphi^n)(t) \geqslant x(\sigma_n, \varphi^n)(t)\left[a^l - b^u x(\sigma_n, \varphi^n)(t) - c^u \frac{\delta}{4}\right].$$

存在 $K_1^{(n)} > 0$, 使得当 $k \geqslant K_1^{(n)}$ 有 $x(\sigma_n, \varphi^n)(t) < \dfrac{2a^u}{b^l}$. 由 (6.3.14) 和比较定理容易证明当 $n \geqslant n_2, k \geqslant K_1^{(n)}$ 时有

$$x(\sigma_n, \varphi^n)(t) \geqslant \frac{a^l - c^u\delta/2}{b^u}, \quad t \in [\tau_k^{(n)} + L_1, t_k^{(n)}].$$

于是, 当 $n \geqslant n_2, k \geqslant K_1^{(n)}$ 时, 对任意 $t \in [\tau_k^{(n)} + L_1, t_k^{(n)}]$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_{t-n\omega}^{t} K(s,t,x(\sigma_n,\varphi^n)(s),x(\sigma_n,\varphi^n)(t))\mathrm{d}s - \int_{t-n\omega}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s \\
\geqslant& -\int_{\tau_k^{(n)}-n\omega}^{t_k^{(n)}+L_1} h(s-t)\left(\left|x(\sigma_n,\varphi^n)(s)-\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right| + \left|x(\sigma_n,\varphi^n)(t)-\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right|\right)\mathrm{d}s \\
\geqslant& -2\left(\frac{2a^u}{b^l}+\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\int_{-\infty}^{t_k^{(n)}+L_1-t} h(s)\mathrm{d}s. \qquad (6.3.25)
\end{aligned}$$

存在 $L_2 > L_1$, 使得

$$2\left(\frac{2a^u}{b^l}+\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\int_{-\infty}^{L_1-L_2} h(s)\mathrm{d}s < \frac{1}{2}\left[f_n\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right) - d^u\right]. \qquad (6.3.26)$$

存在 $n_3 > n_2$, 使得当 $n \geqslant n_3$ 时有

$$t_k^{(n)} - \tau_k^{(n)} \geqslant 2(L_1 + L_2).$$

于是, 当 $n \geqslant n_3, k \geqslant K_1^{(n)}, t \in [\tau_k^{(n)} + L_1 + L_2, t_k^{(n)}]$ 时, 由式 (6.3.25) 和 (6.3.26) 有

$$\int_{t-n\omega}^{t} K(s,t,x(\sigma_n,\varphi^n)(s),x(\sigma_n,\varphi^n)(t))\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \int_{t-n\omega}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l-c^u\delta}{b^u},\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\left[f_n\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)-d^u\right]\\
&\geqslant f_n\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)-d^u\right]\\
&=\frac{1}{2}f_n\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)+\frac{1}{2}d^u,
\end{aligned}
$$

从而

$$
-d^u+\int_{t-n\omega}^{t} K(s,t,x(\sigma_n,\varphi^n)(s),x(\sigma_n,\varphi^n)(t))\mathrm{d}s\geqslant \frac{1}{2}f_n\left(\frac{a^l-c^u\delta}{b^u}\right)-\frac{d^u}{2}>0,
$$

故当 $n\geqslant n_3, k\geqslant K_1^{(n)}, t\in[\tau_k^{(n)}+L_1+L_2, t_k^{(n)}]$ 时有 $y'(\sigma_n,\varphi^n)(t)>0$. 因此

$$
y(\sigma_n,\varphi^n)(t_k^{(n)})>y(\sigma_n,\varphi^n)(\tau_k^{(n)}+L_1+L_2)>\frac{\beta_n\delta}{4},
$$

与 (6.3.22) 矛盾, 引理证毕. ∎

引理 6.3.13 设 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ 成立, S 是 $\mathrm{int}BC_n^+$ 中给定集合, 则存在 $P(S)>0$, 使得对任意 $\varphi^n\in S$ 有

$$
x(0,\varphi^n)(t), y(0,\varphi^n)(t)\leqslant P(S),\quad t\geqslant 0.
$$

证明 假设引理结论对 $y(0,\varphi^n)(t)$ 不成立, 则由引理 6.3.5 知存在 $\varphi_m^{(n)}\in S$ 和 τ_m, t_m 满足 $0\leqslant\tau_m<t_m, \tau_m\to\infty, m\to\infty$, 使得

$$
\begin{cases}
y(0,\varphi_m^{(n)})(\tau_m)=N_2,\quad y(0,\varphi_m^{(n)})(t_m)=m+N_2,\\
N_2<y(0,\varphi_m^{(n)})(t)<m+N_2,\quad t\in(\tau_m,t_m),
\end{cases}
\tag{6.3.27}
$$

其中, $N_2=\sup\limits_{\varphi\in S}\left\{\varphi_2(0)+\dfrac{2a^u}{c^l}\right\}$. 容易证明

$$
x(0,\varphi_m^{(n)})(t)<N_1:=\sup_{\varphi\in S}\left(\varphi_1(0)+\frac{2a^u}{c^l}\right),\quad t\geqslant 0.
$$

于是有

$$
y'(0,\varphi_m^{(n)})(t)\leqslant y(0,\varphi_m^{(n)})(t)\int_{t-n\omega}^{t}K(s,t,N_1,N_1)\mathrm{d}s\leqslant 2N_1 l y(0,\varphi_m^{(n)})(t).
$$

由比较定理容易证明

$$
y(0,\varphi_m^{(n)})(t)\leqslant N_2\mathrm{e}^{2N_1 l(t-\tau_m)},\quad t\geqslant\tau_m.
$$

于是

$$t_m - \tau_m \geqslant \frac{1}{2N_1 l} \ln\left(\frac{m}{N_2} + 1\right). \tag{6.3.28}$$

对任意 $t \in [\tau_m, t_m]$ 有

$$x'(0, \varphi_m^{(n)})(t) \leqslant x(0, \varphi_m^{(n)})(t)\left(a^u - c^l \frac{2a^u}{c^l}\right) = -a^u x(0, \varphi_m^{(n)})(t),$$

因此

$$x(0, \varphi_m^{(n)})(t) \leqslant N_1 \mathrm{e}^{-a^u(t-\tau_m)}, \quad t \in [\tau_m, t_m]. \tag{6.3.29}$$

存在 $L_1 > 0$, 使得

$$N_1 \mathrm{e}^{-a^u L_1} < \frac{d^l}{4l}. \tag{6.3.30}$$

由 (6.3.28), 存在 $m_1 > 0$, 使得当 $m \geqslant m_1$ 时,

$$t_m - \tau_m \geqslant 2(L_1 + m\omega).$$

因此, 当 $m \geqslant m_1, t \in [\tau_m + L_1 + n\omega, t_m]$ 时有

$$y'(0, \varphi_m^{(n)})(t) \leqslant y(0, \varphi_m^{(n)})(t)\left(-d^l + \frac{d^l}{2}\right) = -\frac{d^l}{2} y(0, \varphi_m^{(n)})(t) < 0,$$

从而有

$$y(0, \varphi_m^{(n)})(t_m) < y(0, \varphi_m^{(n)})(\tau_m + L_1 + n\omega) < m + N_2,$$

与 (6.3.27) 矛盾, 所以引理对 $y(0, \varphi^n)(t)$ 成立, 显然引理对 $x(0, \varphi^n)(t)$ 成立. 引理证毕. ∎

引理 6.3.14(Horn不动点定理)　*设 F 是 Banach 空间 X 到自身的全连续映射. 如果存在有界集 E 使得对任意 $x \in E$, 总存在 $m = m(x)$, 使得 $F^m(x) \in E$, 则 F 在 E 上有不动点.*

令

$$k_n(s, t, x, y) = K(s, t, x, y) + K(s - \omega, t, x, y) + \cdots + K(s - (n-1)\omega, t, x, y).$$

考虑系统

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t) - c(t)y(t)], \\ y'(t) = y(t)\left[-d(t) + \displaystyle\int_{t-\omega}^{t} k_n(s, t, x(s), x(t))\mathrm{d}s\right]. \end{cases} \tag{6.3.31}$$

引理 6.3.15　*如果 $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ 是系统 (6.3.31) 的 ω 周期解, 则也是 (6.3.2) 的 ω 周期解.*

证明 注意到

$$
\begin{aligned}
\psi'(t)&=\psi(t)\left[-d(t)+\int_{t-\omega}^{t} k_n(s,t,\varphi(s),\varphi(t))\mathrm{d}s\right]\\
&=\psi(t)\left[-d(t)+\int_{t-\omega}^{t} (K(s,t,\varphi(s),\varphi(t))+K(s-\omega,t,\varphi(s),\varphi(t))+\cdots\right.\\
&\quad \left.+K(s-(n-1)\omega,t,\varphi(s),\varphi(t)))\mathrm{d}s\right]\\
&=\psi(t)\left[-d(t)+\int_{t-\omega}^{t} K(s,t,\varphi(s),\varphi(t))\mathrm{d}s+\int_{t-2\omega}^{t-\omega} K(s,t,\varphi(s),\varphi(t))\mathrm{d}s+\cdots\right.\\
&\quad \left.+\int_{t-n\omega}^{t-(n-1)\omega} K(s,t,\varphi(s),\varphi(t))\mathrm{d}s\right]\\
&=\psi(t)\left[-d(t)+\int_{t-n\omega}^{t} K(s,t,\varphi(s),\varphi(t))\mathrm{d}s\right].
\end{aligned}
$$

引理证毕. ■

引理 6.3.16 如果 $n\geqslant n_0$, 则

$$
\int_{t-\omega}^{t} k_n\left(s,t,\frac{a^l}{b^u},\frac{a^l}{b^u}\right)\mathrm{d}s>d^u,\quad t\in\mathbb{R}.
$$

证明 与上面证明类似, 容易证明

$$
\int_{t-\omega}^{t} k_n\left(s,t,\frac{a^l}{b^u},\frac{a^l}{b^u}\right)\mathrm{d}s=\int_{t-n\omega}^{t} K\left(s,t,\frac{a^l}{b^u},\frac{a^l}{b^u}\right)\mathrm{d}s.
$$

由引理 6.3.9 和 n_0 的定义, 结论显然. 引理证毕. ■

因此方程 (6.3.31) 可以看成方程 (6.3.2) 的特例, 也是方程 (6.3.1) 的特例. 方程 (6.3.31) 满足条件 $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$, 因此, 引理 6.3.1~ 引理 6.3.4 对于方程 (6.3.31) 也成立, 相应的 T,ξ,η 分别记作 T_1,ξ_1,η_1.

定义

$$
S=\left\{\varphi\in BC_1\left|\frac{\xi_1}{2}\leqslant\varphi_1(s)\leqslant\frac{2a^u}{b^l},\ \frac{\eta_1}{2}\leqslant\varphi_2(s)\leqslant 2T_1\right.\right\}.
$$

引理 6.3.17 如果 $n\geqslant n_0$, 则方程 (6.3.2) 存在一个 ω 周期解 $x=\varphi^n(t),t\in\mathbb{R}$ 且

$$
\frac{\xi^*}{2}\leqslant\varphi_1^n(t)\leqslant\frac{2a^u}{b^l},\quad \frac{\eta^*}{2}\leqslant\varphi_2^n(t)\leqslant 2T^*,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{6.3.32}
$$

证明　设 $\bar{x}(\sigma,\varphi)(t)$ 表示方程 (6.3.31) 满足初始条件 $x_\sigma=\varphi$ 的解, 其中, $\varphi\in BC_1,\sigma\in\mathbb{R}$. 显然在上确界范数下, BC_1 是 Banach 空间. 定义映射 $F:BC_1\to BC_1$ 如下:

$$F(\varphi)=\bar{x}_\omega(0,\varphi).$$

由引理 6.3.13, F 是全连续的.

如果 $\varphi\in S$, 由引理 6.3.1~ 引理 6.3.4 知存在 $m>0$, 使得当 $t\geqslant(m+1)\omega$ 时,

$$\frac{\xi_1}{2}\leqslant\bar{x}_1(0,\varphi)(t)\leqslant\frac{2a^u}{b^l},\quad \frac{\eta_1}{2}\leqslant\bar{x}_2(0,\varphi)(t)\leqslant 2T_1, \tag{6.3.33}$$

即 $\bar{x}_{m\omega}(0,\varphi)\in S$, 亦即 $F^m(\varphi)\in S$.

由引理 6.3.14, 存在 $\varphi^*\in S$, 使得 $F(\varphi^*)=\varphi^*$, 因此 $\varphi^n(t)=\bar{x}(0,\varphi^*)(t)$ 是方程 (6.3.2) 的 ω 周期解且 (6.3.32) 成立. 证毕. ■

定理 6.3.1　*设* $(\mathrm{A}_1)\sim(\mathrm{A}_3)$ *成立, 则系统* (6.3.1) *存在* ω *周期解* $\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t))$ *且*

$$\xi\leqslant\phi_1(t)\leqslant\frac{a^u}{b^l},\quad \eta\leqslant\phi_2(t)\leqslant T,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{6.3.34}$$

证明　由引理 6.3.17, 当 $n\geqslant n_0$ 时, 方程 (6.3.2) 存在 ω 周期解 $\phi^n(t)$,

$$\frac{\xi^*}{2}\leqslant\phi_1^n(t)\leqslant\frac{2a^u}{b^l},\quad \frac{\eta^*}{2}\leqslant\phi_2^n(t)\leqslant 2T^*,\quad t\in\mathbb{R}$$

且

$$|\phi^n(s_1)-\phi^n(s_2)|\leqslant L|s_1-s_2|.$$

因此函数序列 $\{\phi^n(s)|s\in[0,\omega],\ n=n_0,n_0+1,n_0+2,\cdots\}$ 一致有界且等度连续, 由 Arzela-Ascoli 定理, 存在 $\{\phi^n(s)|s\in[0,\omega],n=n_0,n_0+1,n_0+2,\cdots\}$ 的子序列 $\{\phi^{n_k}(s)|k=1,2,\cdots\}$ 一致收敛到连续函数 $\bar{\phi}(s),\ s\in[0,\omega]$. 因为 $\phi^{n_k}(s)$ 是 ω 周期的, 所以 $\bar{\phi}(0)=\bar{\phi}(\omega)$.

令

$$\phi(t)=\bar{\phi}(t-k\omega),\quad t\in[k\omega,(k+1)\omega],\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

易见, $\phi(t)$ 是连续的 ω 周期函数且对任意 $t\in\mathbb{R},\phi^{n_k}(t)$ 一致收敛到 $\phi(t)$.

定义

$$K_n(s,t,x,y)=\begin{cases}K(s,t,x,y), & s\geqslant t-n\omega,\\ 0, & s<t-n\omega.\end{cases}$$

显然 $K_n(s,t,x,y)$ 可测. 因为

$$\begin{cases} \phi_1^n(t) = \phi_1^n(0) + \int_0^t \phi_1^n(s)[a(s) - b(s)\phi_1^n(s) - c(s)\phi_2^n(s)]\mathrm{d}s, \\ \phi_2^n(t) = \phi_2^n(0) + \int_0^t \phi_2^n(s)\left[-d(s) + \int_{-\infty}^s K_n(\tau, s, \phi_1^n(\tau), \phi_1^n(s))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{6.3.35}$$

$$\left|\int_{-\infty}^s K_n(\tau, s, \phi_1^n(\tau), \phi_1^n(s))\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \frac{4a^u l}{b^l},$$

$$\left|\int_{-\infty}^s K_n(\tau, s, \phi_1^n(\tau), \phi_1^n(s))\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^s K(\tau, s, \phi_1(\tau), \phi_1(s))\mathrm{d}\tau\right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

于是在 (6.3.35) 两边, 令 $n \to \infty$, 由控制收敛定理有

$$\phi_1(t) = \phi_1(0) + \int_0^t \phi_1(s)[a(s) - b(s)\phi_1(s) - c(s)\phi_2(s)]\mathrm{d}s,$$

$$\phi_2(t) = \phi_2(0) + \int_0^t \phi_2(s)\left[-d(s) + \int_{-\infty}^s K(\tau, s, \phi_1(\tau), \phi_1(s))\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s.$$

因此, $\phi(t)$ 是方程 (6.3.1) 的 ω 周期解. 由引理 6.3.1~ 引理 6.3.4, 容易证明 (6.3.34) 成立. 定理证毕. ■

文献 [170] 进一步研究了系统 (6.3.1) 的持久性和周期解的存在性, 得到了充要判据.

定理 6.3.2 假设 (A_1), (A_2) 成立, 则系统 (6.3.1) 一致持久当且仅当

$$\int_0^\omega \int_{-\infty}^t K(s, t, x^*(s), x^*(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t > \int_0^\omega d(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $x^*(t)$ 是 Logistic 方程 $x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t)]$ 的唯一的全局渐近稳定周期解.

定理 6.3.3 假设 (A_1), (A_2) 成立, 则系统 (6.3.1) 存在正周期解当且仅当

$$\int_0^\omega \int_{-\infty}^t K(s, t, x^*(s), x^*(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t > \int_0^\omega d(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $x^*(t)$ 是 Logistic 方程 $x'(t) = x(t)[a(t) - b(t)x(t)]$ 的唯一的全局渐近稳定周期解.

文献 [46] 证明了上述 Logistic 方程存在唯一的全局渐近稳定周期解, 并给出了其显式表达式.

本节内容主要取自文献 [158].

注 6.3.1　应用本节的研究方法, 类似的可以研究文献 [160] 所研究系统的正周期解的存在性. 近年来, 许多学者[170] 应用本章的方法研究了生态学系统的持久性和正周期解的存在性, 得到了非常好的结果.

第 7 章　具有无限时滞的泛函方程的基本理论

泛函方程是一类非常重要的方程. 大体上讲, 可以分为两类: 单变元泛函方程 (亦称为迭代泛函方程) 和多变元泛函方程[1, 2, 3, 35]. 在自然科学和社会科学的各个领域都有广泛的应用[1, 2, 26]. 其研究历史可追溯到 Euler (1768), D'Alembert (1769), Poisson (1804), Cauchy (1821), Abel (1823), Darboux (1875) 等, 这些著名数学家均对函数方程或泛函方程做过深入而广泛的研究. 泛函方程的研究与著名的 Hilbert 第五问题密切相关, 正如 Hilbert 所述, 微分方程理论为泛函方程的求解提供了有力的工具, 但可微性的假设并不是必需的. 受此推动, 在 20 世纪, 泛函方程理论获得了长足的发展, 许多数学家对各种类型的泛函方程进行了深入而广泛的研究, 建立了现代泛函方程理论[1, 3, 35].

尽管许多学者对一些特殊类型的泛函方程的解的性质进行了大量的研究, 但泛函方程基本理论方面的工作尚不多见, 特别是对于具有无限时滞的泛函方程.

作为相空间理论的应用, 本章将建立一类具有无限时滞的泛函方程的基本理论, 即研究泛函方程 (7.1.1) 的解的存在性 (7.2 节)、唯一性 (7.3 节)、解的延展性 (7.4 节)、解对初值的连续相依性 (7.5 节).

本章内容主要取自文献 [161].

7.1　预 备 知 识

设 B 是映 $\mathbb{R}^-$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的实函数所构成的赋范线性空间, 并赋之以范数 $|\cdot|$. 对任意的 $\varphi \in B$ 和 $0 < A \leqslant +\infty, \sigma \in \mathbb{R}$, 令 $x^p(\sigma,\varphi)$ 为定义在 $(-\infty, A]$ 上的 $\mathbb{R}^n$ 值函数, 使得 $x^p_\sigma(\sigma,\varphi) = \varphi$ 和 $x^p(\sigma,\varphi)(t) = p(t-\sigma)$, $\sigma < t \leqslant \sigma + A$, 其中, $p \in C([0,A] \mapsto \mathbb{R}^n) := C_A$. 对任意的 $p \in C_A$, 定义 p 的范数为 $|p| = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant A} |p(s)|$.

设 Ω 为 $\mathbb{R} \times B$ 的开子集. 考虑如下形式的具有无限时滞的泛函方程:

$$x(t) = f(t, x_t), \tag{7.1.1}$$

其中, $f(t,\varphi) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ 连续, 即 $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. 定义

$$|f| = \sup_{(t,\varphi)\in\Omega} |f(t,\varphi)|.$$

与具有无限时滞的泛函微分方程类似, 具有无限时滞的泛函方程理论的发展依赖于相空间的选取. 对于具有无限时滞的泛函微分方程的相空间理论已有许多学

者进行了深入而广泛的研究, 但具有无限时滞的泛函方程的相空间理论尚无人进行研究. 首先建立其相空间理论.

设相空间 B 满足下列条件:

(A_1) 对任意的 $\varphi \in B$, $p \in C_A$ 有 $x_t^p(\sigma,\varphi) \in B$, $t \in [\sigma, \sigma+A]$, 且对任意给定的 $\varphi \in B$, $x_t^p(\sigma,\varphi)$ 关于 $t \in [\sigma,\sigma+A]$ 连续;

(A_2) 存在连续函数 $K:\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ 和 $M:\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, 使得对任意的 (t,p,φ), $(t,q,\psi) \in [\sigma,\sigma+A] \times C_A \times B$ 有

$$|x_t^p(\sigma,\varphi) - x_t^q(\sigma,\psi)| \leqslant K(t-\sigma)|p-q|^{[\sigma,t]} + M(t-\sigma)|\varphi-\psi|,$$

其中, $|\cdot|^{[\alpha,\beta]}$ 表示区间 $[\alpha,\beta]$ 上的上确界范数;

(A_3) 存在常数 $J>0$, 使得对任意的 $\varphi \in B$ 有 $|\varphi| \geqslant J|\varphi(0)|$;

(A_4) 存在满足 $q(0)=1$ 的递减连续函数 $q(\tau):\mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R}^+$, 使得对任意的 $\tau \in \mathbb{R}^-, \varphi \in B$ 有

$$|\varphi_\tau| \leqslant q(\tau)|\varphi|;$$

(A_5) 存在连续函数 $Q(\tau):\mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R}^+$, 使得对任意的 $\varphi,\psi \in B, \tau \in \mathbb{R}^-$ 有

$$|\psi-\varphi|^{[\tau,0]} \leqslant Q(\tau)|\psi-\varphi|.$$

定义 7.1.1 设 $A>0$. 称函数 $x:(-\infty,\sigma+A) \mapsto \mathbb{R}^n$ 为方程 (7.1.1) 定义在 $(-\infty,\sigma+A)$ 上的解, 如果 $(t,x_t) \in \Omega$ 且 $x(t)$ 在 $[\sigma,\sigma+A)$ 上满足方程 (7.1.1); 对给定的 $\sigma \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi \in B$, 称 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 为方程 (7.1.1) 满足初始条件

$$x_\sigma = \varphi \tag{7.1.2}$$

的解 (或方程 (7.1.1) 通过 (σ,φ) 的解), 如果存在 $A>0$, 使得 $x(\sigma,\varphi)(t)$ 是方程 (7.1.1) 在 $(-\infty,\sigma+A)$ 上的解且满足 $x_\sigma(\sigma,\varphi)=\varphi$.

注 7.1.1 一般来说, 即使 $\varphi(s)$ 在 $\mathbb{R}^-$ 上连续, 初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解 $y(t)$(如果在 $(-\infty,\sigma+A)$ 上存在) 也未必在 $t=\sigma$ 连续. 欲使得 $y(t)$ 在 $t=\sigma$ 连续, 必须假设 $f(\sigma,\varphi)=\varphi(0)$ 成立.

7.2 解的存在性

本节将利用 Schauder 不动点定理证明初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解的存在性. 对给定的 $A>0$, 令

$$C_A(L) = \{p \in C_A \,|\, |p(t)-p(s)| \leqslant L|t-s|, \quad t,s \in [0,A]\}.$$

定义 7.2.1 设 Ω 是 $\mathbb{R}\times B$ 的开子集. 称泛函 $f(t,\varphi):\Omega\mapsto\mathbb{R}^n$ 在点 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$ 处是局部拟 Lipschitz 的, 如果存在 $\varepsilon>0$ 及正常数 $L>0$, 使得对任意的 $t,s\in[\sigma,\sigma+\varepsilon]$ 及满足 $p(0)=f(\sigma,\varphi)$ 的 $p\in C_A(L)$ 有

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(s,x_s^p(\sigma,\varphi))|\leqslant L|t-s|;$$

如果 $f(t,\varphi)$ 在 Ω 中的每一点处都是局部拟 Lipschitz 的, 则称 $f(t,\varphi)$ 在 Ω 上是局部拟 Lipschitz 的.

定义 7.2.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}\times B$ 中的开集, E 是 Ω 的子集. 称泛函 $f(t,\varphi):\Omega\mapsto\mathbb{R}^n$ 在 E 上是局部拟 Lipschitz 的, 如果 $f(t,\varphi)$ 在 E 中的每一点均是局部拟 Lipschitz 的. 如果存在常数 $L(E)>0$ 和 $\varepsilon>0$, 使得只要 $(t,x_t^p(\sigma,\varphi))\in E$, $t\in[\sigma,t_1]\cup[\sigma,t_2]$ 就有

$$|f(t_1,x_{t_1}^p(\sigma,\varphi))-f(t_2,x_{t_2}^p(\sigma,\varphi))|\leqslant L(E)|t_1-t_2|,$$

则称 $f(t,\varphi)$ 在 E 上是拟 Lipschitz 的.

下面分两种情形讨论初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解的存在性. 首先假设 $\Omega=\mathbb{R}\times B$.

定理 7.2.1 设相空间 B 满足 (A_1) 和 (A_2). 对任意的 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times B$, 如果 $f(t,\varphi)$ 在点 (σ,φ) 是局部拟 Lipschitz 的, 则存在常数 $b>0$, 使得初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 存在定义在 $(-\infty,\sigma+b]$ 上的解.

证明 因为 $f(t,\varphi)$ 在点 (σ,φ) 是局部拟 Lipschitz 的, 由定义 7.2.1, 存在常数 $b>0$ 和 $L>0$, 使得对任意的 $t,s\in[\sigma,\sigma+b]$ 和 $p\in S$ 有

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(s,x_s^p(\sigma,\varphi))|\leqslant L|t-s|,$$

其中,

$$S=\{p\in C_b(L)|p(0)=f(\sigma,\varphi)\}.$$

容易证明 C_b 是 Banach 空间且 S 是 C_b 中的凸紧集. 定义映射 $F:S\mapsto C_b$,

$$F(p)(t)=f(\sigma+t,x_{\sigma+t}^p(\sigma,\varphi)),\quad t\in[0,b].$$

由 (A_1) 和 $f(t,\varphi)$ 的连续性易知 F 关于 p 是连续的且对于给定的 $p\in S, F(p)(t)$ 关于 t 连续. 显然有

$$F(p)(0)=f(\sigma,x_\sigma^p(\sigma,\varphi))=f(\sigma,\varphi),\quad p\in S.$$

由定义 7.2.1, 对任意的 $t_1,t_2\in[0,b]$ 有

$$\begin{aligned}|F(p)(t_1)-F(p)(t_2)|&=|f(\sigma+t_1,x_{\sigma+t_1}^p(\sigma,\varphi))-f(\sigma+t_2,x_{\sigma+t_2}^p(\sigma,\varphi))|\\&\leqslant L|t_1-t_2|.\end{aligned}$$

至此已经证明 F 映 S 到自身. 由 Schauder 不动点定理知 F 有不动点 $\bar{p}\in S$. 令

$$x^*(t)=\begin{cases}\varphi(t-\sigma), & t\leqslant\sigma,\\ \bar{p}(t-\sigma), & t\in[\sigma,\sigma+b].\end{cases}$$

容易证明 $x^*(t)$ 是初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解. 证毕. ∎

下面假设 Ω 是 $\mathbb{R}\times B$ 的真子集. 令

$$S_d(\varphi):=\{\psi\in B\,|\,|\psi-\varphi|\leqslant d\},\quad d>0.$$

引理 7.2.1 *对任意的* $p\in S:=\{\psi\in C_A(L)|\psi(0)=f(\sigma,\varphi)\}$, *存在* $t^*=t^*(L,\sigma,\varphi)>\sigma$, *使得对任意的* $t\in[\sigma,t^*]$ *有* $x_t^p(\sigma,\varphi)\in S_d(\varphi)$.

证明 由于 $x_\sigma^p(\sigma,\varphi)=\varphi$, 所以存在 $t(p)>\sigma$, 使得对任意的 $t\in[\sigma,t(p)]$ 有 $x_t^p(\sigma,\varphi)\in S_d(\varphi)$. 令 $t^*(p)=\sup t(p)$. 下面证明

$$t^*:=\inf_{p\in S}t^*(p)>\sigma$$

即为所求. 若不然, 存在 $p_k\in S$ 和 $t_k\geqslant\sigma$, $k=1,2,\cdots$, 使得 $t_k\to\sigma$ 且

$$x_{t_k}^{p_k}(\sigma,\varphi)\,\bar{\in}\,S_d(\varphi).$$

因为 S 是紧致集, 存在子序列 $\{p_{k_m}\}$ 和 $p^*\in S$, 使得当 $m\to\infty$ 时有 $p_{k_m}\to p^*$. 不失一般性, 不妨假设当 $k\to\infty$ 时, $p_k\to p^*$. 由 (A_1) 和 (A_2), 当 $k\to\infty$ 时有

$$\begin{aligned}|x_{t_k}^{p_k}(\sigma,\varphi)-\varphi|&=|x_{t_k}^{p_k}(\sigma,\varphi)-x_\sigma^{p^*}(\sigma,\varphi)|\\&\leqslant|x_{t_k}^{p_k}(\sigma,\varphi)-x_{t_k}^{p^*}(\sigma,\varphi)|+|x_{t_k}^{p^*}(\sigma,\varphi)-x_\sigma^{p^*}(\sigma,\varphi)|\\&\leqslant K(t_k-\sigma)|p_k-p^*|^{[\sigma,t_k]}+|x_{t_k}^{p^*}(\sigma,\varphi)-x_\sigma^{p^*}(\sigma,\varphi)|\to 0.\end{aligned}$$

因此, 对充分大的 k 有 $x_{t_k}^{p_k}(\sigma,\varphi)\in S_d(\varphi)$. 矛盾. 证毕. ∎

引理 7.2.2 *对任意的* $t\geqslant\sigma,\varphi\in B$, $p\in C_A$ *和* $\tau\in\mathbb{R}$ *有*

$$x_t^p(\sigma,\varphi)=x_{t-\sigma+\tau}^p(\tau,\varphi).$$

证明 由定义有

$$x_t^p(\sigma,\varphi)(\theta)=\begin{cases}\varphi(t-\sigma+\theta), & \theta\leqslant\sigma-t,\\ p(t-\sigma+\theta), & \theta>\sigma-t.\end{cases}$$

此外还有

$$\begin{aligned}x_{t-\sigma+\tau}^p(\tau,\varphi)(\theta)&=\begin{cases}\varphi(t-\sigma+\tau+\theta-\tau), & t-\sigma+\tau+\theta\leqslant\tau,\\ p(t-\sigma+\tau+\theta-\tau), & t-\sigma+\tau+\theta>\tau\end{cases}\\&=\begin{cases}\varphi(t-\sigma+\theta), & \theta\leqslant\sigma-t,\\ p(t-\sigma+\theta), & \theta>\sigma-t.\end{cases}\end{aligned}$$

因此

$$x_t^p(\sigma,\varphi)=x_{t-\sigma+\tau}^p(\tau,\varphi).$$ ■

定理 7.2.2 *假设相空间 B 满足 (A_1) 和 (A_2). 如果对任意给定的 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$, $f(t,\varphi)$ 在 (σ,φ) 是局部拟 Lipschitz 的, 则存在 $b>0$ 使得初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 存在定义在 $(-\infty,\sigma+b]$ 上的解.*

证明 与定理 7.2.1 的证明类似, 由定义 7.2.2, 存在常数 $c>0$ 和 $L>0$, 使得对任意的 $t_1,t_2\in[0,c]$ 和 $p\in S$ 有

$$|f(\sigma+t_1,x_{\sigma+t_1}^p(\sigma,\varphi))-f(\sigma+t_2,x_{\sigma+t_2}^p(\sigma,\varphi))|\leqslant L|t_1-t_2|,$$

其中,

$$S=\{p\in C_c(L)|p(0)=f(\sigma,\varphi)\}.$$

由于 $(\sigma,\varphi)\in\Omega$ 且 Ω 是开集, 故存在 $d:0<d<c$, 使得 $(\sigma-d,\sigma+d)\times S_d(\varphi)\subset\Omega$, 其中,

$$S_d(\varphi):=\{\psi\in\Omega||\psi-\varphi|\leqslant d\}.$$

由引理 7.2.1, 存在 $t^*>\sigma$, 使得对任意的 $p\in S$ 和 $t\in[\sigma,t^*]$ 有

$$x_t^p(\sigma,\varphi)\in S_d(\varphi).$$

取 $b=\min\{t^*,d\}$, 对任意固定的 $p\in S$ 有

$$|x_t^p(\sigma,\varphi)-\varphi|\leqslant d.$$

于是闭集 $[\sigma,\sigma+b]\times S_b(\varphi)\subset\Omega$. 由 Tietze 扩张定理, 存在连续泛函 $F(t,\psi):\mathbb{R}\times B\mapsto\mathbb{R}^n$, 使得对任意的 $(t,\psi)\in[\sigma,\sigma+b]\times S_b(\varphi)$ 有 $F(t,\psi)=f(t,\psi)$. 显然, $F(t,\psi)$ 在 (σ,φ) 满足局部拟 Lipschitz 条件. 由定理 7.2.1, 初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 存在定义在 $(-\infty,\sigma+b]$ 的解 $y(t)$ 且

$$|y(t)-y(s)|\leqslant L|t-s|,\quad t,s\in[\sigma,\sigma+b].$$

由 $F(t,\varphi)$ 的定义可以断言, $y(t)$, $t\in(-\infty,\sigma+b]$ 是初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解. 证毕. ■

7.3 解的唯一性

为了证明初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解的唯一性, 需要进一步假设

(A_6) 存在连续函数 $n(t)\geqslant 0$ 满足 $\lim\limits_{t\to 0}n(t)=0$ 且使得对任意的 $\varphi\in B$, $p,q\in C_A$, $t\in[\sigma,\sigma+A]$ 有

$$|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^q(\sigma,\varphi))|\leqslant n(t-\sigma)|p-q|^{[0,t-\sigma]}.$$

定理 7.3.1　如果相空间 B 满足 (A_1) 和 (A_6), 则初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 至多存在一个解.

证明　设 $x(\sigma,\varphi)(t)$, $y(\sigma,\varphi)(t)$, $t\in(-\infty,\sigma+b]$, $0<b\leqslant A$ 为初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的两个解. 令 $p(t-\sigma)=x(\sigma,\varphi)(t)$, $q(t-\sigma)=y(\sigma,\varphi)(t)$, $t\in[\sigma,\sigma+b]$, 于是 $p,q\in C_b$. 由 (A_6) 有

$$\begin{aligned}|p(t-\sigma)-q(t-\sigma)|&=|f(t,x_t^p(\sigma,\varphi))-f(t,x_t^q(\sigma,\varphi))|\\&\leqslant n(t-\sigma)|p-q|^{[0,t-\sigma]},\quad t\in[\sigma,\sigma+b].\end{aligned}$$

于是

$$|p-q|^{[0,t-\sigma]}\leqslant n(t-\sigma)|p-q|^{[0,t-\sigma]},\quad t\in[\sigma,\sigma+b].$$

由于 $\lim\limits_{t\to0}n(t)=0$, 故存在 $s\in(\sigma,\sigma+b]$, 使得 $n(s-\sigma)<1$. 于是

$$|p-q|^{[0,s-\sigma]}\leqslant n(s-\sigma)|p-q|^{[0,s-\sigma]}<|p-q|^{[0,s-\sigma]}.$$

至此, 可以断言 $p(t)\equiv q(t)$, $t\in[0,s-\sigma]$. 将 s 视为新的 σ, 重复上面的讨论, 容易证明 $p(t)\equiv q(t)$, $t\in[0,b]$. 证毕. ■

推论 7.3.1　假设 (A_6) 成立. 如果定理 7.2.1 和定理 7.2.2 中的条件满足, 则存在 $b>0$, 使得初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 在 $(-\infty,\sigma+b]$ 上存在唯一解.

7.4　解的延展性

定义 7.4.1　设 x 是初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 定义在区间 $[\sigma,b]$, $b>\sigma$ 上的解. 称 $\hat{x}$ 是 x 的延拓, 如果存在 $c>b$, 使得 $\hat{x}$ 定义在 $[\sigma,c]$, 在 $(-\infty,b)$ 上与 x 重合且在 $[\sigma,c)$ 上满足 (7.1.1)-(7.1.2). 初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解 $x(t)$, $t\in(-\infty,b)$ 称为是不可延拓的, 如果不存在上述的延拓解, 即区间 $[\sigma,b)$ 是解 x 的最大存在区间.

由著名的 Zorn 引理可以推知不可延展解的存在性, 此外容易证明, 最大存在区间一定是开的.

引理 7.4.1　设相空间 B 满足 (A_1), (A_2) 和 (A_5), $y(t)$ 是初值问题 (7.1.1), (7.1.2) 的解. 如果存在 $t_n\to b^-$ 和 $\psi\in B$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $y_{t_n}\to\psi$, 则当 $n\to+\infty$ 时,

$$y(t_n)\to\psi(0).\tag{7.4.1}$$

证明　不妨设 $t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots<b$. 取 $\tau<t_1-b<t_n-b<0$. 由 (A_5) 有

$$|y_{t_n}-\psi|^{[\tau,0]}\to0,\quad n\to+\infty.\tag{7.4.2}$$

于是 $\psi(\theta)$ 在 $[\tau,0]$ 关于 θ 连续. 下面使用反证法证明 (7.4.1) 成立. 如果 (7.4.1) 不成立, 则存在 $\varepsilon>0$ 和 $\tau_n\in[t_{n-1},t_n], n=2,\cdots$, 使得

$$|y(\tau_n)-\psi(0)|=|y_{\tau_n}(0)-\psi(0)|>\varepsilon>0.$$

注意到存在 $N>0$, 使得

$$|\psi(\tau_n-t_n)-\psi(0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\quad n\geqslant N.$$

于是, 当 $n\geqslant N$ 时有

$$\begin{aligned}|y_{t_n}-\psi|^{[\tau,0]}&\geqslant|y_{t_n}(\tau_n-t_n)-\psi(\tau_n-t_n)|\\&=|y(\tau_n)-\psi(\tau_n-t_n)|\\&=|y(\tau_n)-\psi(0)+\psi(0)-\psi(\tau_n-t_n)|\\&\geqslant||y(\tau_n)-\psi(0)|-|\psi(0)-\psi(\tau_n-t_n)||\\&\geqslant|y(\tau_n)-\psi(0)|-|\psi(0)-\psi(\tau_n-t_n)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

与 (7.4.2) 矛盾. 证毕. ∎

定理 7.4.1 设相空间 B 满足 $(A_1),(A_2)$ 和 (A_5), $f(t,\varphi)$ 在 Ω 上是局部拟 Lipschitz 的, 其中, Ω 是 $\mathbb{R}\times B$ 中的开集. 初值问题 (7.1.1), (7.1.2) 的解 $y(t),t\in(-\infty,b),b>\sigma$ 是不可延展的当且仅当

$$\left.\begin{array}{l}\text{存在}\ \ t_n\to b^-\ \ \text{和}\ \ \psi\in B,\\ \text{使得当}\ \ n\to\infty\ \ \text{时},\ \ y_{t_n}\to\psi\end{array}\right\}\Rightarrow(b,\psi)\in\partial\Omega.$$

证明 必要性. 如果存在 $t_n\to b^-$ 和 $\psi\in B$, 使得当 $n\to+\infty$ 时, $(t_n,y_{t_n})\to(b,\psi)$ 且 $(b,\psi)\in\Omega$, 由引理 7.4.1, 当 $t\to b^-$ 时有 $y(t)\to\psi(0)$. 故 $y(t)$ 可连续延拓到 $(-\infty,b]$. 与 $y(t)$ 不可延拓矛盾.

充分性. 设 $x(t)$, $t\in(-\infty,b)$ 为初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 的解. 如果 $x(t)$ 可以延拓, 则有 $\lim\limits_{t\to b^-}(t,x_t)=(b,x_b)\in\Omega$, 这与 $(b,x_b)\in\partial\Omega$ 矛盾. 证毕. ∎

定理 7.4.2 设相空间 B 满足 (A_1), (A_2) 和 (A_5); W 是 $[\sigma,\sigma+A]\times B$ 中的紧致集; $(\sigma,\varphi)\in W$, $f(t,\varphi)$ 在 W 上是局部拟 Lipschitz 的; $x(t)$ 是为初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 定义在 $(-\infty,b)$, $\sigma<b\leqslant\sigma+A$ 上的不可延展解, 则存在 $T>\sigma$, 使得 $(T,x_T)\in B-W$.

证明 如果 $b=+\infty$ 且 $(t,x_t)\in W$, $t\geqslant\sigma$, 则序列 $\{(\sigma+n,x_{\sigma+n})\}$ 没有收敛子列, 这与 W 的紧致性矛盾.

假设 $b<+\infty$, $(t,x_t)\in W$, $t\geqslant\sigma$. 可以选取 $t_n\to b$. 因为 W 是紧致集, 故存在 $\psi\in W$, 使得当 $n\to+\infty$ 时, $x_{t_n}\to\psi$. 由引理 7.4.1 有

$$x(t)\to\psi(0),\quad t\to b.$$

因此, $x(t)$ 在 $(-\infty, b]$ 上可被连续延拓. 然而, $x(t)$ 在 $t=b$ 是不可延拓的. 矛盾! 定理证毕. ∎

定理 7.4.3 设相空间 B 满足 (A_1) 和 (A_2); $f(t,\varphi)$ 在 Ω 的任意有界子集上是拟 Lipschitz 的; $x(t)$ 是初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 定义在 $[\sigma, b)$ 上的不可延展解. 如果 $x(t)$ 在 $[\sigma, b)$ 上是有界的, 则 $b=+\infty$.

证明 设对任意的 $t \in [\sigma, b)$, $|x|^{[\sigma,t]} \leqslant \alpha < +\infty$. 若 $b<+\infty$, 则由 (A_2), 对任意的 $t \geqslant \sigma$ 有

$$|x_t| \leqslant K(t-\sigma)|x|^{[\sigma,t]} + M(t-\sigma)|x_\sigma| \leqslant K^*\alpha + M^*|x_\sigma| := \beta,$$

其中, $K^* = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant b-\sigma} K(s)$, $M^* = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant b-\sigma} M(s)$. 于是集合 $E = \{(t, x_t)|t \in [\sigma, b)\}$ 是 $\mathbb{R} \times B$ 的有界子集. 由已知条件知存在常数 $L(E)$, 使得

$$|x(t)-x(s)| = |f(t,x_t) - f(s,x_s)| \leqslant L(E)|t-s|, \quad s,t \in [\sigma, b).$$

因此 $x(b^-) = \lim\limits_{t\to b^-} x(t)$ 存在, $x(t)$ 在 $(-\infty, b]$ 可连续延拓. 矛盾! ∎

7.5 解对初值的连续依赖性

设 $\Omega \subset \mathbb{R}\times B$, $(\sigma,\varphi) \in \Omega$, $x(t)$ 是初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 定义在 $(-\infty, b]$, $b>\sigma$ 上的解; 令 $W = \{(t, x_t)|t \in [\sigma, b]\}$, V 是 W 的邻域; $f(t,\psi)$ 在 V 上是拟 Lipschitz 的; W 和 $B-V$ 之间的距离 $d(W, B-V) = 2d > 0$. 定义

$$U = \{p \in C_{b-\sigma} | |p(0) - f(\sigma,\varphi)| < d,\ |p(t)-p(s)| \leqslant L(V)|t-s|,\quad t,s \in [0, b-\sigma]\},$$

其中 $L(V)$ 是 f 在 V 上的拟 Lipschitz 常数.

$$K^* := \max_{0\leqslant t\leqslant b-\sigma} K(t), \quad M^* := \max_{0\leqslant t\leqslant b-\sigma} M(t).$$

引理 7.5.1 设相空间 B 满足 $(A_1) \sim (A_3)$ 和 (A_6). 如果 $p \in U$, $s \in [\sigma, b]$ 且

$$|x_s^p(\sigma,\varphi) - x_s| < \min\left\{\frac{d}{2M^*}, \frac{Jd}{2K^*}\right\} := \beta,$$

则

$$(\tau, x_\tau^p(\sigma,\varphi)) \in V, \quad \tau \in [s, s+\lambda],$$

其中, $\lambda = \dfrac{d}{5K^*L(V)}$.

证明 显然有

$$|x_\tau^p(\sigma,\varphi)-x_\tau|=|x_\tau^{p_1}(s,x_s^p(\sigma,\varphi))-x_\tau^{x_1}(s,x_s)|,\quad \tau\in[s,s+\lambda],\tag{7.5.1}$$

其中, $p_1(t)=p(t+s)$, $x_1(t)=x(t+s)$. 由 (7.5.1) 和 (A_2) 有

$$\begin{aligned}|x_\tau^p(\sigma,\varphi)-x_\tau|&\leqslant K(\tau-s)|p_1-x_1|^{[0,\tau-s]}+M(\tau-s)|x_s^p(\sigma,\varphi)-x_s|\\&\leqslant K^*|p_1-x_1|^{[0,\lambda]}+M^*|x_s^p(\sigma,\varphi)-x_s|.\end{aligned}\tag{7.5.2}$$

由 (A_3) 有

$$\begin{aligned}|p_1(0)-x_1(0)|&=|x_s^p(\sigma,\varphi)(0)-x_s(0)|\\&\leqslant\frac{1}{J}|x_s^p(\sigma,\varphi)-x_s|\\&\leqslant\frac{1}{J}\min\left\{\frac{d}{2M^*},\frac{Jd}{2K^*}\right\}\leqslant\frac{d}{2K^*}.\end{aligned}$$

于是

$$|p_1-x_1|^{[0,\lambda]}\leqslant\frac{d}{2K^*}+2L(V)\lambda\leqslant\frac{d}{K^*}.\tag{7.5.3}$$

由 (7.5.2) 和 (7.5.3) 有

$$|x_\tau^p(\sigma,\varphi)-x_\tau|\leqslant K^*\frac{d}{K^*}+M^*\frac{d}{2M^*}<2d.$$

因此

$$d((\tau,x_\tau^p(\sigma,\varphi)),(\tau,x_\tau))<2d,$$

即 $(\tau,x_\tau^p(\sigma,\varphi))\in V$. 证毕 ■

定理 7.5.1 设相空间 B 满足 (A_1) ~ (A_3) 和 (A_6); $\Omega\subset\mathbb{R}\times B$, $(\sigma,\varphi)\in\Omega$, $x(t)$ 是初值问题 (7.1.1)-(7.1.2) 定义在 $(-\infty,b]$, $b>\sigma$ 上的解; f 在上面所定义的 V 上有定义且关于 t 是拟 Lipschitz 的. 如果 $\varphi_i\in B$ 且当 $i\to+\infty$ 时, $|\varphi-\varphi_i|\to0$, 则存在 $N>0$, 使得当 $i\geqslant N$ 时, 初值问题

$$x(t)=f(t,x_t),\quad x_\sigma=\varphi_i,\tag{7.5.4}$$

存在定义在 $(-\infty,b]$ 上的解 $x^i(t)$ 且在 $[\sigma,b]$ 上, $x^i(t)$ 一致收敛到 $x(t)$.

证明 β,λ,K^*,M^*,d 如引理 7.5.1 所定义, $n(t)$ 如 (A_6) 中所定义, 则存在 $\lambda_1>0$, 使得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\lambda_1}n(t):=n^*<\frac{1}{K^*}.$$

令 $\lambda^*=\min\{\lambda,\lambda_1\}$. 因为当 $i\to+\infty$ 时, $|\varphi-\varphi_i|\to0$, 所以存在 $N_1>0$, 使得当 $i>N_1$ 时, $|\varphi_i-\varphi|<\beta$. 由定理 7.4.2 和引理 7.5.1, 初值问题 (7.5.4) 存在定义在 $[\sigma,\sigma+\lambda^*]:=I_1$ 上的解 $x^i(t)$. 对 $i>N_1$ 和 $t\in I_1$ 有

$$\begin{aligned}|x^i(t)-x(t)| &= |f(t,x_t^i)-f(t,x_t)| \\ &\leqslant n(t-\sigma)|x_t^i-x_t| \\ &\leqslant n(t-\sigma)[K(t-\sigma)|x^i-x|^{[\sigma,t]}+M(t-\sigma)|\varphi-\varphi_i|] \\ &\leqslant n^*K^*|x^i-x|^{[\sigma,\sigma+\lambda^*]}+n^*M^*|\varphi-\varphi_i|.\end{aligned}$$

于是

$$|x^i-x|^{[\sigma,\sigma+\lambda^*]}\leqslant \frac{n^*M^*}{1-n^*K^*}|\varphi-\varphi_i|.$$

因此, 当 $i\to+\infty$ 时, 在 I_1 上 $x^i(t)$ 一致收敛到 $x(t)$. 令 $a_1=\sigma+\lambda^*$. 因为

$$|x_{a_1}^i-x_{a_1}|\leqslant n^*K^*|x^i-x|^{[\sigma,\sigma+\lambda_1]}+n^*M^*|\varphi-\varphi_i|,$$

故存在 $N_2>N_1$, 使得当 $i>N_2$ 时 $|x_{a_1}^i-x_{a_1}|<\beta$. 由定理 7.4.2 和引理 7.5.1, 初值问题 (7.5.4) 的解 $x^i(t)$ 在 $[\sigma,\sigma+2\lambda^*]:=I_2$ 上有定义. 完全类似地, 可以证明当 $i\to+\infty$ 时 $x^i(t)$ 在 I_2 上一致收敛到 $x(t)$. 同理, 可以证明, 存在 $N_3>N_2$, 使得当 $i>N_3$ 时 $|x_{a_2}^i-x_{a_2}|<\beta$, 其中, $a_2:=\sigma+2\lambda^*$. 显然存在整数 $L>0$, 使得 $L\lambda^*\geqslant b-\sigma$. 因此, 重复上面证明 L 次, 即可证明定理. ■

由定理 7.5.1 和 (A_2), 容易证明下面的定理:

定理 7.5.2　*设定理 7.5.1 中的条件满足, 则存在 $N>0$, 使得当 $i>N$ 时, 初值问题 (7.5.4) 存在定义在 $(-\infty,b]$ 上的解 $x^i(t)$, 且当 $i\to+\infty$ 时,*

$$|x_t^i-x_t|\to 0,\quad t\in[\sigma,b].$$

7.6 例　子

本节将给出满足拟 Lipschitz 条件的泛函和具有无限时滞的泛函方程的相空间的具体实例.

7.6.1 满足拟 Lipschitz 条件的泛函

考虑如下形式的泛函方程:

$$x(t)=a(t)+\int_0^t f(t,s,x_s)\mathrm{d}s,\tag{7.6.1}$$

其中, $a(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 关于 t 是局部 Lipschitz 的; $f(t,s,\varphi):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times B\to\mathbb{R}$ 关于 φ 和 s 连续, 关于 t 连续可微; $f_t'(t,s,\varphi)$ 将有界集映入有界集. 显然, 方程 (7.6.1) 是方程 (7.1.1) 的特例.

方程 (7.6.1) 形式非常一般, 包括许多其他类型方程作为特例. 例如,

(1) 如果 $a(t)\equiv a$, $f(t,s,\varphi)\equiv f(s,\varphi(0))$, 则 (7.6.1) 即是非自治常微分方程 $x'=f(t,x(t))$.

(2) 如果 $a(t)\equiv a$, $f(t,s,\varphi)\equiv f(s,\varphi(-r))$, 则 (7.6.1) 即是微分差分方程 $x'=f(t,x(t-r))$.

(3) 如果 $a(t)\equiv a$, $f(t,s,\varphi)\equiv f(s,\varphi)$, 则 (7.6.1) 即是具有无限时滞的泛函微分方程 $x'=f(t,x_t)$, 其中, $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in(-\infty,0]$.

(4) 如果 $f(t,s,\varphi)\equiv f(t,s,\varphi(0))$, 则 (7.6.1) 即是积分方程

$$x(t)=a(t)+\int_0^t f(t,s.x(s))\mathrm{d}s.$$

(5) 具有无限时滞的 Volterra 积分方程

$$x(t)=a(t)+\int_{-\infty}^t f(t,s,x(s))\mathrm{d}s,\quad x(s)\equiv\varphi(s),\ s\in(-\infty,0].$$

令

$$A(t)=a(t)+\int_{-\infty}^0 f(t,s,\varphi(s))\mathrm{d}s,$$

则有

$$x(t)=A(t)+\int_0^t f(t,s,x(s))\mathrm{d}s,$$

显然是方程 (7.6.1) 的特例.

(6) 如下形式的积分方程:

$$x(t)=a(t)+\int_0^t\int_{-\infty}^s C(t,s,\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$

显然是方程 (7.6.1) 的特例.

令

$$F(t,\varphi)=\int_0^t f(t,s,\varphi_{s-t})\mathrm{d}s.$$

引理 7.6.1 设相空间 B 满足 (A_1), (A_2) 和 (A_4), 则对任意的 $(\sigma,\varphi)\in\mathbb{R}\times B$, $\sigma\geqslant 0$, 泛函 $g(t,\varphi):=a(t)+F(t,\varphi)$ 在 (σ,φ) 是局部拟 Lipschitz 的.

证明 对任意给定的 $p\in C_A(L)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t,x_t^p(\sigma,\varphi))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(t,s,x_s^p(\sigma,\varphi))\mathrm{d}s$$

$$= f(t, t, x_t^p(\sigma, \varphi)) + \int_0^t f_t'(t, s, x_s^p(\sigma, \varphi))\mathrm{d}s. \tag{7.6.2}$$

由 (A_1) 和 (A_2),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t, x_t^p(\sigma, \varphi)) := F'(t, x_t^p(\sigma, \varphi))$$

关于 (t, σ, φ, p) 连续. 由 (A_4) 有

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant \sigma} |\varphi_{s-\sigma}| \leqslant q(-\sigma)|\varphi|.$$

所以, 存在 $M > 0$, 使得 $|f_t'(\sigma, s, \varphi_{s-\sigma})| \leqslant M$. 显然, M 不依赖于 p 的选取. 由

$$F'(\sigma, x_\sigma^p(\sigma, \varphi)) = f(\sigma, \sigma, \varphi) + \int_0^\sigma f_t'(\sigma, s, \varphi_{s-\sigma})\mathrm{d}s$$

有

$$|F'(\sigma, x_\sigma^p(\sigma, \varphi))| \leqslant |f(\sigma, \sigma, \varphi)| + M\sigma.$$

因为 $a(t)$ 关于 t 是局部 Lipschitz 的, 所以存在 $\delta > 0$ 和 $L_1 > 0$, 使得

$$|a(t) - a(s)| \leqslant L_1|t - s|, \quad t, s \in [\sigma, \sigma + \delta].$$

由 $f(t, s, \varphi)$ 的连续性知, 存在 $\varepsilon_1 > 0$, 使得

$$|f(t, t, \psi)| \leqslant 2|f(\sigma, \sigma, \varphi)|, \quad t \in [\sigma, \sigma + \varepsilon_1], \ \psi \in S_{\varepsilon_1}(\varphi).$$

进一步, 存在 $\varepsilon_2 > 0$, 使得

$$|f_t'(t, s, \psi)| \leqslant 2M, \quad t, s \in [\sigma, \sigma + \varepsilon_2], \ \psi \in S_{\varepsilon_2}(\varphi).$$

令 $L = L_1 + 2|f(\sigma, \sigma, \varphi)| + 2M(\sigma + 1)$. 对任意的满足 $p(0) = f(\sigma, \varphi)$ 的 $p \in C_A(L)$, 由引理 7.2.1, 存在 $t^* > 0$, 使得对 $t \in [\sigma, \sigma + t^*]$, $p \in C_A(L)$ 有

$$x_t^p(\sigma, \varphi) \in S_{\varepsilon_1}(\varphi) \cup S_{\varepsilon_2}(\varphi).$$

选取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, t^*, \delta, 1\}$, 易知

$$|g(t, x_t^p(\sigma, \varphi)) - g(s, x_s^p(\sigma, \varphi))| \leqslant L|t - s|,$$

其中, $p \in C_A(L)$, $t, s \in [\sigma, \sigma + \varepsilon]$. 证毕. ■

引理 7.6.2　设相空间 B 满足 (A_1), (A_2), (A_4). 此外,

(i) 对任意的有界开区间 $I \subset \mathbb{R}$, 存在 $L(I) > 0$, 使得

$$|a(t) - a(s)| \leqslant L(I)|t - s|, \quad t, s \in I;$$

(ii) $f(t, s, \varphi)$ 将有界集映入有界集,

则泛函 $g(t, \varphi)$ 在任意有界集 $E \subset \mathbb{R} \times B$ 上是拟 Lipschitz 的.

证明 设 $E \subset \mathbb{R} \times B$ 有界. 易知存在有界子区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和有界子集 $B_1 \subset B$, 使得如果 $(t, \varphi) \in E$, 则有 $t \in I$ 和 $\varphi \in B_1$. 令

$$A = \sup_{\substack{t,s \in I \\ \varphi \in B_1}} |f(t, s, \varphi)|, \quad B = \sup_{\substack{t,s \in I \\ \varphi \in B_1}} |f'(t, s, \varphi)|.$$

如果 $(t, x_t^p(\sigma, \varphi)) \in E$, $t \in I$, 则由 (7.6.2) 有

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t, x_t^p(\sigma, \varphi)) \right| \leqslant A + m(I)B,$$

其中, $m(I)$ 是区间 I 的测度. 于是

$$|g(t, x_t^p(\sigma, \varphi)) - g(s, x_s^p(\sigma, \varphi))| \leqslant [L(I) + A + m(I)B]|t - s|.$$

证毕. ∎

7.6.2 相空间实例

考虑 2.1 节所建立的 $\mathscr{C}_h$ 空间. 与 2.1 节类似, 容易证明 $\mathscr{C}_h$ 空间满足 7.1 节中关于相空间 B 的假设 $(\mathrm{A}_1) \sim (\mathrm{A}_3)$.

引理 7.6.3 如果存在满足 $q(0) = 1$ 的连续递减函数 $q : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, 使得

$$h(s) \leqslant h(s + \tau) q(\tau), \quad t, s \in \mathbb{R}^-,$$

则 $\mathscr{C}_h$ 满足 (A_4).

证明 事实上,

$$\begin{aligned} |\varphi_\tau|_h &= \int_{-\infty}^0 h(s) |\varphi_\tau|^{[s,0]} \mathrm{d}s \leqslant \int_{-\infty}^0 h(s) |\varphi|^{[s+\tau,0]} \mathrm{d}s \\ &\leqslant q(\tau) \int_{-\infty}^0 h(s+\tau) |\varphi|^{[s+\tau,0]} \mathrm{d}s \\ &= q(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} h(s) |\varphi|^{[s,0]} \mathrm{d}s < q(\tau) |\varphi|_h. \end{aligned}$$

证毕. ∎

注 7.6.1 令 $h(s) = \mathrm{e}^s$ 和 $q(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau}$, 显然, 引理 7.6.3 中的条件满足.

引理 7.6.4 $\mathscr{C}_h$ 满足 (A_5).

证明 注意到

$$|\varphi-\psi|_h=\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi-\psi|^{[s,0]}\mathrm{d}s\geqslant\int_{-\infty}^{\tau}h(s)|\varphi-\psi|^{[s,0]}\mathrm{d}s$$
$$\geqslant\int_{-\infty}^{\tau}h(s)|\varphi-\psi|^{[\tau,0]}\mathrm{d}s.$$

因此

$$|\varphi-\psi|^{[\tau,0]}\leqslant Q(\tau)|\varphi-\psi|_h,$$

其中, $Q(t)=\left[\int_{-\infty}^{\tau}h(s)\mathrm{d}s\right]^{-1}$. 证毕. ■

注 7.6.2 $\mathscr{C}_h$ 空间与 $\mathscr{C}_g$ 空间有着紧密的联系. 类似地, 读者可以很容易地建立具有无限时滞的泛函方程的 $\mathscr{C}_g$ 相空间理论.

第 8 章 时标动力学方程的周期性

时标动力学方程是更为广泛的方程类型, 它包含微分方程和差分方程作为特例. 其研究历史最早可以追溯到 1988 年[79]. 德国数学家 Hilger[79, 80] 建立了测度链分析理论, 目的是整合和统一连续与离散分析, 同时将经典的微积分拓广到一般测度链或时标上, 建立了一般测度链上的分析理论. 文献 [80] 发表后受到了数学家的广泛关注, 涌现出了许多新的研究成果. 测度链分析理论是沟通连续数学和离散数学的桥梁. Bohner 和 Peterson[9, 10] 系统分析了一类重要的测度链上的动力学方程 —— 时标动力学方程.

对时标动力学方程进行研究, 可以把微分方程理论和差分方程理论很好地结合在一起, 不仅可以揭示微分方程和差分方程的异同点, 还能统一微分方程理论和差分方程的相关理论, 进而可以揭示微分方程和差分方程的本质差别, 同时可以把相应结果拓广到更为一般的时标动力学方程. 由于时标动力学方程非常广泛, 既可以描述连续过程, 也可以刻画离散过程, 同时可以刻画连续与离散混合的过程, 因而在应用上有着巨大的潜力. 在很多实际问题的研究中, 时标的选取至关重要[41], 时标动力学方程为我们提供了描述客观世界的一个强有力工具.

时标动力学方程是一个新兴的研究领域. 近几年来, 国内外一些学者开始开展这方面的研究工作, 在稳定性、振动性、边值问题等方面取得了一定的进展. 但时标动力学方程周期性方面的研究尚不多见.

本章主要介绍文献 [7](即 8.2 节和 8.3 节) 和文献 [8](即 8.4 节) 中关于时标动力学方程周期性的研究结果.

8.1 时标微积分简介

本节介绍时标微积分中的一些基本定义和主要结果, 内容主要取自文献 [9].

8.1.1 基本定义与记号

定义 8.1.1 实数集 $\mathbb{R}$ 的任意一个非空闭子集称为一个时标, 记为 $\mathbb{T}$.

例如, 实数集 $\mathbb{R}$、整数集 $\mathbb{Z}$、自然数集 $\mathbb{N}$、非负整数集 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$、$\mathbb{T} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}\bigcup\{n : n \in \mathbb{N}_0\}$、Cantor 集等都是时标, 而有理数集 $\mathbb{Q}$、无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$、复数集 $\mathbb{C}$、开区间 $(0,1)$ 等都不是时标.

设 $a, b \in \mathbb{T}$. 定义 $\mathbb{T}$ 上的区间为

$$\mathbb{T}^- = \mathbb{T} \cap \mathbb{R}^-, \quad \mathbb{T}^+ = \mathbb{T} \cap \mathbb{R}^+.$$

$$(a, b) = \{t \in \mathbb{T} | \ a < t < b\}, \quad [a, b] = \{t \in \mathbb{T} | \ a \leqslant t \leqslant b\},$$

其他区间可类似定义.

定义 8.1.2　设 $\mathbb{T}$ 是时标, 对任意的 $t \in \mathbb{T}$, 定义 $\sigma : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}$,

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} | s > t\}$$

为前跃算子; 定义 $\rho : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}$,

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} | s < t\}$$

为后跃算子. 若 $t \in \mathbb{T}$ 是时标 $\mathbb{T}$ 的最大值, 则定义 $\sigma(t) = \inf \varnothing := \sup \mathbb{T} = t$; 若 $t \in \mathbb{T}$ 是时标 $\mathbb{T}$ 的最小值, 则定义 $\rho(t) = \sup \varnothing := \inf \mathbb{T} = t$.

若 $\sigma(t) > t$, 则称 t 是右散的; 若 $\rho(t) < t$, 则称 t 是左散的; 若点 t 既是左散的又是右散的, 则称 t 是孤立的. 若 $t < \sup \mathbb{T}$ 且 $\sigma(t) = t$, 则称 t 是右稠的; 若 $t > \inf \mathbb{T}$ 且 $t = \rho(t)$, 则 t 是左稠的; 若点 t 既是左稠的又是右稠的, 则称 t 是稠密的.

定义 $\mu : \mathbb{T} \mapsto [0, \infty)$,

$$\mu(t) = \sigma(t) - t, \quad t \in \mathbb{T}$$

为粒函数.

本章使用如下记号:

定义

$$\mathbb{T}^{\mathcal{K}} := \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T}, & \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

设 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, 定义 $f^\sigma : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ 为

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)), \quad t \in \mathbb{T},$$

即 $f^\sigma = f \circ \sigma$.

8.1.2　微分与积分

定义 8.1.3　设函数 $f : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$, 取定 $t \in \mathbb{T}^{\mathcal{K}}$. 若存在数 $f^\Delta(t)$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 t 的一个邻域 U(即 $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$), 使得

$$|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leqslant \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad s \in U,$$

则称 $f^\Delta(t)$ 为 f 在 t 点的 Δ 导数. 若对任意 $t \in \mathbb{T}^{\mathcal{K}}$, $f^\Delta(t)$ 存在, 称 f 在 $\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$ 上 Δ 可微. 称 $f^\Delta : \mathbb{T}^{\mathcal{K}} \mapsto \mathbb{R}$ 为 f 在 $\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$ 上的 Δ 导函数.

引理 8.1.1 设函数 $f:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$. 则

(1) 若 f 在 t 点可微, 则 f 在 t 点连续;

(2) 若 f 在 t 点连续且 t 是右散的, 则 f 在 t 点可微且

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f^{\sigma}(t)-f(t)}{\mu(t)};$$

(3) 若 t 是右稠的, 则 f 在 t 点可微当且仅当极限 $\lim\limits_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ 存在且有限. 此时

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s};$$

(4) 若 f 在 t 点可微, 则 $f^{\sigma}(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$.

引理 8.1.2 设函数 $f,g:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$ 在 $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ 可微. 则

(1) 对任意常数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$ 可微且

$$(\alpha f+\beta g)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)+\beta g^{\Delta}(t);$$

(2) $fg:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$ 可微且

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t);$$

(3) 若 $g(t)g^{\sigma}(t)\neq 0$, 则 f/g 在 t 可微且

$$\left(\frac{f}{g}\right)(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)}.$$

定义 8.1.4 若函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 在右稠点连续、在左稠点左极限存在且有限, 则称函数 f 是右稠连续的. 右稠连续函数所构成的集合记作 $C_{\rm rd}(\mathbb{T})$. 若 f 在 $\mathbb{T}$ 中右稠点处存在有限右极限, 在左稠点处存在有限左极限, 则称 f 是正则函数.

引理 8.1.3 设 $f,g:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$, 则有

(1) 若 f 连续, 则 f 右稠连续; 若 f 右稠连续的, 则 f 是正则的;

(2) σ 是右稠连续的;

(3) 若 f 是右稠连续的 (或正则的), 则 f^{σ} 是右稠连续的 (正则的);

(4) 若 f: 是连续的, g 是右稠连续的 (或正则的), 则 $f\circ g$ 是右稠连续的 (正则的).

引理 8.1.4 紧致区间上的正则函数有界.

定义 8.1.5 设函数 $f,F:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$. 若 $F^{\Delta}(t)=f(t), t\in\mathbb{T}^{\kappa}$, 则称 F 为 f 的原函数, 并且定义 Cauchy 积分为

$$\int_r^s f(t)\Delta t=F(s)-F(r),\quad r,s\in\mathbb{T}.$$

定义 8.1.6　右稠连续函数均有原函数. 特别地, 对 $t_0 \in \mathbb{T}$, 函数

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{T}$$

就是 f 的一个原函数.

引理 8.1.5　设 $f \in \mathrm{C_{rd}}$, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$, 则 $\int_{t}^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = \mu(t)f(t)$.

引理 8.1.6　设 $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T})$, 则

(1) $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \beta \int_a^b g(t)\Delta t$;

(2) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$;

(3) 若 $|f(t)| \leqslant g(t)$, $t \in [a, b)$, 则 $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leqslant \int_a^b g(t)\Delta t$;

(4) $\int_a^b f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$,

$$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)\Delta t.$$

定义 8.1.7　设 $a \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$, f 在 $[a, \infty)$ 上是右稠连续的. 定义广义积分为

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)\Delta t.$$

若此极限存在, 称广义积分收敛. 若此极限不存在, 称广义积分发散.

8.1.3　指数函数

下面将在一般时标 $\mathbb{T}$ 上定义广义指数函数. 首先引入柱面变换. 设 $\mathbb{C}$ 为复数集. 对 $h > 0$, 定义

$$\mathbb{Z}_h = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{h} \right\},$$

对 $h = 0$, 定义 $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

定义 8.1.8 对 $h>0$, 定义柱面变换 $\xi_h:\mathbb{C}_h\mapsto\mathbb{Z}_h$,

$$\xi_h(z)=\frac{1}{h}\mathrm{Log}(1+zh),$$

其中, Log 为主对数函数, $\mathbb{C}_h=\{z\in\mathbb{C}|z\neq-1/h\}$. 对 $h=0$, 定义 $\xi_0(z)=z, z\in\mathbb{C}$.

定义 8.1.9 称函数 $p:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$ 为回归的, 若

$$1+\mu(t)p(t)\neq0,\quad t\in\mathbb{T}^{\kappa}.$$

所有回归的且右稠连续的函数 $f:\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$ 所构成的集合记为 $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\mathbb{T})=\mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R})$. 记

$$\mathcal{R}^+=\{p\in\mathcal{R}|\ 1+\mu(t)p(t)>0,\ t\in T\}.$$

定义 $\mathcal{R}$ 上的加法 $\oplus$ 和减法 $\ominus$ 分别为

$$(p\oplus q)(t):=p(t)+q(t)+\mu(t)p(t)q(t),\quad t\in\mathbb{T}^{\mathcal{K}},$$

$$(p\ominus q)(t):=(p\oplus(\ominus q))(t)=\frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)},\quad t\in\mathbb{T}^{\mathcal{K}},$$

其中,

$$(\ominus q)(t):=-\frac{q(t)}{1+\mu(t)q(t)},\quad t\in\mathbb{T}^{\mathcal{K}}.$$

不难证明, $\mathcal{R}$ 关于 $\oplus$ 和 $\ominus$ 是封闭的且 $(\mathcal{R},\oplus)$ 是 Abel 群.

定义 8.1.10 设 $p\in\mathcal{R}$. 定义指数函数为

$$e_p(t,s)=\exp\left(\int_s^t\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right),\quad s,t\in\mathbb{T}.$$

引理 8.1.7 设 $p\in\mathcal{R}$, 则一阶线性时标动力学方程初值问题

$$y^{\Delta}=p(t)y,\quad y(s)=1,\quad s\in\mathbb{T}$$

的解存在且唯一, 此唯一解即为指数函数 $e_p(\cdot,s)$.

引理 8.1.8 设 $p,q\in\mathcal{R}$, 则

$$e_p(t,s)=\frac{1}{e_p(s,t)}=e_{\ominus p}(s,t),\quad e_p(t,u)e_p(u,s)=e_p(t,s),$$

$$e_p(\sigma(t),s)=(1+\mu(t)p(t))e_p(t,s),\quad e_p(s,\sigma(t))=\frac{e_p(s,t)}{1+\mu(t)p(t)},$$

$$e_p^{\Delta}(\cdot,s)=pe_p(\cdot,s),\quad e_p^{\Delta}(s,\cdot)=(\ominus p)e_p(s,\cdot),$$

$$e_{p\oplus q}(t,x)=e_p(t,s)e_q(t,s),\quad e_{p\ominus q}(t,s)=\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)}.$$

引理 8.1.9　若 $p \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 且 $p(t) \geqslant 0, t \in \mathbb{T}$, 则 $p \in \mathcal{R}^+$. 若 $p \in \mathcal{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{T}$, 则 $e_p(t, t_0) > 0$, $t \in \mathbb{T}$.

定义 8.1.11[7]　设 $\omega > 0$. 若对任意的 $t \in \mathbb{T}$ 有 $t + \omega \in \mathbb{T}$, 则称时标 $\mathbb{T}$ 是 ω 周期的. 也记作 $\mathbb{T} + \omega = \mathbb{T}$, 即 $\{t + \omega | t \in \mathbb{T}\} = \mathbb{T}$. 设 $\mathbb{T}$ 是 ω 周期的, $p : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$, 若对任意的 $t \in \mathbb{T}$ 有 $p(t + \omega) = p(t)$, 则称 p 是 ω 周期的.

引理 8.1.10[7]　设 $\mathbb{T}$ 是 ω 周期的, $p \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 是 ω 周期的, $a, b \in \mathbb{T}$, 则有

$$\sigma(t+\omega) = \sigma(t) + \omega, \quad \rho(t+\omega) = \rho(t) + \omega, \quad \mu(t+\omega) = \mu(t),$$

$$\int_{a+\omega}^{b+\omega} p(t)\Delta t = \int_a^b p(t)\Delta t, \quad e_p(b, a) = e_p(b+\omega, a+\omega), \ p \in \mathcal{R}$$

对任意的 $p \in \mathcal{R}, k_p := e_p(t+\omega, t) - 1, t \in \mathbb{T}$ 为常数.

引理 8.1.11[7]　设 $\mathbb{T}$ 是 ω 周期的, $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ 满足文献 [9] 中定理 1.117 的假设. 定义

$$g(t) = \int_t^{t+\omega} f(t, s)\Delta s.$$

令 $f^{\Delta}(t, s)$ 表示 f 关于 t 的导数, 则有

$$g^{\Delta}(t) = \int_t^{t+\omega} f^{\Delta}(t, s)\Delta s + f(\sigma(t), t+\omega) - f(\sigma(t), t).$$

8.2　时标上的 C_h 空间

设$\inf \mathbb{T} = -\infty$, $0 \in \mathbb{T}$ 且若 $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, 则 $t_1 + t_2 \in \mathbb{T}$. 设 $h \in C_{rd}(\mathbb{T}^-, \mathbb{R}^+)$, $h(s) > 0$, $s \in \mathbb{T}^-$ 且 $\int_{-\infty}^{0} h(s)\Delta s = 1$. 定义

$$C_h = \left\{ \varphi \in C_{rd}(\mathbb{T}^-, \mathbb{R}^n) \middle| \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\Delta s < \infty \right\},$$

其中,

$$|\varphi|^{[s,0]} = \sup_{s \leqslant \theta \leqslant 0} |\varphi(\theta)|.$$

容易证明, C_h 是 C_{rd} 的线性子空间, BC_{rd}(有界右稠连续函数所构成集合) 是 C_h 的

线性子空间. 对任意的 $\varphi \in C_h$, 定义 $|\varphi|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\Delta s < \infty$, 于是 $(C_h, |\cdot|_h)$ 是赋范空间, 简记为 C_h.

引理 8.2.1 对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $K > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, 使得对任意的 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_h$, 若 $|\varphi_1 - \varphi_2|_h \leqslant \delta$, 则 $|\varphi_1 - \varphi_2|^{[-K,0]} \leqslant \varepsilon$.

证明 采用反证法. 假设存在 $\varepsilon^* > 0$ 和 $K^* > 0$, 使得对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\varphi_1^\delta, \varphi_2^\delta \in C_h$, 使得 $|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta|_h \leqslant \delta$, 但 $|\varphi_1^\delta - \varphi_2^\delta|^{[-K^*,0]} > \varepsilon^*$.

令 $\delta^* = \frac{\varepsilon^*}{2}\int_{-\infty}^{-K^*} h(s)\Delta s > 0$, $\varphi_1^* = \varphi_1^{\delta^*}$, $\varphi_2^* = \varphi_2^{\delta^*}$. 于是 $|\varphi_1^* - \varphi_2^*|_h \leqslant \delta^*$, 但 $|\varphi_1^* - \varphi_2^*|^{[-K^*,0]} > \varepsilon^*$. 从而

$$\begin{aligned}
\delta^* \geqslant |\varphi_1^* - \varphi_2^*|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_1^* - \varphi_2^*|^{[s,0]}\Delta s \\
&= \int_{-\infty}^{-K^*} h(s)|\varphi_1^* - \varphi_2^*|^{[s,0]}\Delta s + \int_{-K^*}^{0} h(s)|\varphi_1^* - \varphi_2^*|^{[s,0]}\Delta s \\
&\geqslant \int_{-\infty}^{-K^*} h(s)|\varphi_1^* - \varphi_2^*|^{[s,0]}\Delta s \geqslant \int_{-\infty}^{-K^*} h(s)|\varphi_1^* - \varphi_2^*|^{[-K^*,0]}\Delta s \\
&> \varepsilon^* \int_{-\infty}^{-K^*} h(s)\Delta s = 2\delta^*,
\end{aligned}$$

矛盾! 定理证毕. ∎

引理 8.2.2 设 $\{\varphi_n\} \subset C_{rd}(\mathbb{T}^-, \mathbb{R}^n)$ 一致有界, 则 $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi_0|_h = 0$ 当且仅当对任意的 $K \in \mathbb{N}$ 有 $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi_0|^{[-K,0]} = 0$.

证明 首先证明必要性. 由引理 8.2.1, 对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $K > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, K)$, 使得对任意的满足 $|\varphi_1 - \varphi_2|_h \leqslant \delta$ 的 $\varphi_1, \varphi_2 \in C_h$ 有 $|\varphi_1 - \varphi_2|^{[-K,0]} < \varepsilon$. 由于 $\lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi_0|_h = 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $n > N$ 有 $|\varphi_n - \varphi_0|_h \leqslant \delta$, $n \geqslant N$. 因此

$$|\varphi_n - \varphi_0|^{[-K,0]} < \varepsilon, \quad \text{i.e.,} \quad \lim_{n\to\infty} |\varphi_n - \varphi_0|^{[-K,0]} = 0.$$

下面证明充分性. 设 $\{\varphi_n\}$ 一致有界, 即存在 $H > 0$, 使得 $|\varphi_n| \leqslant H$, $n \in \mathbb{N}$. 令 $\varepsilon > 0$. 由于 $\int_{-\infty}^{0} h(s)\Delta s = 1 < \infty$, 存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得 $\int_{-\infty}^{-K} h(s)\Delta s < \varepsilon$. 进一步,

对所有的 $k \in \mathbb{N}$. 存在 $N_k \in \mathbb{N}$, 使得如果 $n \geqslant N_k$, 则有 $|\varphi_n - \varphi_0|^{[-k,0]} \leqslant \varepsilon$, 从而 $|\varphi_0|^{[-k,0]} \leqslant H + \varepsilon$, 于是 $|\varphi_0| \leqslant H + \varepsilon$. 因此, 对 $n \geqslant N_K$ 有

$$\begin{aligned}|\varphi_n - \varphi_0|_h &= \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi_0|^{[s,0]}\Delta s \\ &= \int_{-\infty}^{-K} h(s)|\varphi_n - \varphi_0|^{[s,0]}\Delta s + \int_{-K}^{0} h(s)|\varphi_n - \varphi_0|^{[s,0]}\Delta s \\ &\leqslant (2H + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon = (2H + \varepsilon + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕. ■

引理 8.2.3　当赋予上确界范数时, $(\mathrm{C_{rd}}[a,b], \mathbb{R}^k)$ 是完备的.

证明　显然 $\mathrm{C_{rd}}[a,b]$ 是线性空间. 由引理 8.1.4, 每个右稠连续函数是有界的.

设 $\{f_n\} \subset \mathrm{C_{rd}}[a,b]$ 为 Cauchy 序列. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, 使得对任意的 $m, n \geqslant N_\varepsilon$ 有 $|f_m - f_n|^{[a,b]} = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon$. 于是对 $m, n \geqslant N_\varepsilon$, $t \in [a,b]$ 有 $|f_m(t) - f_n(t)| \leqslant \sup\limits_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon$. 因此 $\{f_n(t)\} \subset \mathbb{R}^k$ 是 Cauchy 序列, 从而可设其收敛到 $f(t)$. 令 $n \geqslant N_\varepsilon$, 于是

$$|f_n(t) - f(t)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

下面将证明 $f \in \mathrm{C_{rd}}[a,b]$.

设 $t^* \in [a,b]$ 是右稠的. 因为 $f_{N_{\varepsilon/3}} \in \mathrm{C_{rd}}[a,b]$, 故对 $\varepsilon > 0$, 存在 t^* 的邻域 U_1, 使得对任意的 $t \in U_1$ 有 $|f_{N_{\varepsilon/3}}(t^*) - f_{N_{\varepsilon/3}}(t)| < \varepsilon/3$. 设 $t \in U_1$, 于是

$$|f(t^*) - f(t)| \leqslant |f(t) - f_{N_{\varepsilon/3}}(t^*)| + |f_{N_{\varepsilon/3}}(t^*) - f_{N_{\varepsilon/3}}(t)| + |f_{N_{\varepsilon/3}}(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

因此, f 在右稠点 t^* 处连续.

下面设 $t^* \in [a,b]$ 是左稠的. 因为 $f_{N_{\varepsilon/2}} \in \mathrm{C_{rd}}[a,b]$, 故对 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得

$$|f_{N_{\varepsilon/2}}(t) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in U_2 = (t^* - \delta, t^*) \cap \mathbb{T}.$$

于是, 对 $t \in U_2$ 有

$$|f(t) - \alpha| \leqslant |f(t) - f_{N_{\varepsilon/2}}(t)| + |f_{N_{\varepsilon/2}}(t) - \alpha| < \varepsilon.$$

因此, f 在左稠点 t^* 处有有限极限 α.

至此证明了 $f \in \mathrm{C_{rd}}[a,b]$, 即 $\mathrm{C_{rd}}[a,b]$ 是完备的. ■

定理 8.2.1　$(\mathrm{C}_h, |\cdot|_h)$ 是 Banach 空间.

证明 设 $\{\varphi_n\}\subset C_h$ 是 Cauchy 序列, 于是 $\{\varphi_n\}$ 有界, 即存在 $M>0$, 使得对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 有 $|\varphi_n|_h\leqslant M$. 设 $k\in T>0$ 满足

$$\int_{-\infty}^{-K} h(s)\Delta s<\frac{\varepsilon}{4M+\varepsilon}.$$

因为 $\lim\limits_{m,n\to\infty}|\varphi_n-\varphi_m|_h=0$, 由引理 8.2.2 有 $\lim\limits_{m,n\to\infty}|\varphi_n-\varphi_m|^{[-K,0]}=0$, 故 $\{\varphi_n\}$ 是 $C_{rd}([-K,0])$ 中的 Cauchy 序列. 由引理 8.2.3, 存在 $\varphi\in C_{rd}([-K,0])$, 使得 $\varphi_n\to\varphi$ (上确界范数). 因此, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得

$$|\varphi_n-\varphi|^{[-K,0]}<\frac{\varepsilon}{2},\quad n\geqslant N.$$

于是对 $t\geqslant -K$ 有

$$|\varphi(t)|\leqslant|\varphi_n(t)-\varphi(t)|+|\varphi_n(t)|\leqslant|\varphi_n-\varphi|^{[-K,0]}+M<\frac{\varepsilon}{2}+M.$$

定义

$$\varphi(t)=\varphi(-K),\ 对所有\ t<-K,$$

于是 $\varphi\in C_{rd}(\mathbb{T}^-)$ 且对 $n\geqslant N$ 有

$$\begin{aligned}
|\varphi_n-\varphi|_h&=\int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi_n-\varphi|^{[s,0]}\Delta s\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{-K} h(s)\left(|\varphi_n|^{[s,0]}+|\varphi|^{[s,0]}\right)\Delta s+\int_{-K}^{0} h(s)|\varphi_n-\varphi|^{[-K,0]}\Delta s\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{-K} h(s)\left(M+\frac{\varepsilon}{2}+M\right)\Delta s+\int_{-K}^{0} h(s)\frac{\varepsilon}{2}\Delta s\\
&<\left(2M+\frac{\varepsilon}{2}\right)\int_{-\infty}^{-K} h(s)\Delta s+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{0} h(s)\Delta s\\
&<\left(2M+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{4M+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此在 C_h 中, $\varphi_n\to\varphi$. ■

定理 8.2.2 设 $\varphi\in C_h$, $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in(-\infty,0]$.

(1) 令 $A\in(0,\infty)$. 若 $x:(-\infty,A)\to\mathbb{R}^n$ 在 $[0,A]$ 上右稠连续且满足 $x_0=\varphi$, 则对任意的 $t\in[0,A]$ 有 $x_t\in C_h$ 且 x_t 关于 t 右稠连续;

(2) 存在 K_1, 使得 $|\varphi(0)|\leqslant K_1|\varphi|_h$.

证明 首先证明 (1). 事实上, 对任意的 $t \in [0, A]$,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} h(s)|x_t|^{[s,0]}\Delta s &= \int_{-\infty}^{-t} h(s)|x_t|^{[s,0]}\Delta s + \int_{-t}^{0} h(s)|x_t|^{[s,0]}\Delta s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-t} h(s)\max\left\{|x|^{[s+t,0]}, |x_t|^{[-t,0]}\right\}\Delta s + \int_{-t}^{0} h(s)|x|^{[0,t]}\Delta s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)|x|^{[s+t,0]}\Delta s + \int_{-\infty}^{0} h(s)|x|^{[0,t]}\Delta s + \int_{-\infty}^{0} h(s)|x|^{[0,t]}\Delta s \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\Delta s + 2\int_{-\infty}^{0} h(s)|x|^{[0,A]}\Delta s \\
&= \int_{-\infty}^{0} h(s)|\varphi|^{[s,0]}\Delta s + 2|x|^{[0,A]} < \infty.
\end{aligned}
$$

因此, $x_t \in \mathrm{C}_h$, $t \in [0, A]$.

下面证明 x_t 关于 t 右稠连续. 证明 x_t 在右稠点处连续 (类似地, 可以证明 x_t 在左稠点处有左极限, 从略).

设 $t \in [0, A]$ 是右稠的. 若 t 也是左稠的 (当 t 是左散点时, 可以类似地证明同样的结论, 从略). 令 $t_0 \in [0, t)$. 因为 $x_{t_0} \in \mathrm{C}_h$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M(t_0, \varepsilon) \in T > 0$, 使得

$$
\int_{-\infty}^{-M} h(s)|x_{t_0}|^{[s,0]}\Delta s < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \int_{-\infty}^{-M} h(s)\Delta s < \frac{\varepsilon}{4L}.
$$

由引理 8.1.3 和引理 8.1.4 知 x 在 $[0, A]$ 上有界, 设 $|x|^{[0,A]} \leqslant L$. 因为 C_h 是 C_{rd} 的子空间且 $x_t \in \mathrm{C}_h$, 故 $x_t \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}$. 设 $-M \leqslant \theta \leqslant 0$. 若 θ 右稠的, 因为 $x_t \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}$, 可以选取充分小的 δ_1, 使得对任意的 $t_0 \in (t - \delta_1, t + \delta_1) \cap \mathbb{T}$ 有

$$
|x_t(\theta) - x_{t_0}(\theta)| = |x_t(\theta) - x_t(\theta + t_0 - t)| < \frac{\varepsilon}{4}.
$$

若 θ 是孤立的, 显然存在 $\delta_2 > 0$, 使得若 $\theta^* \in (\theta - \delta_2, \theta + \delta_2) \cap \mathbb{T}$, 则必有 $\theta^* = \theta$. 因此, 当 $|t_0 - t| < \delta_2$ 时有 $\theta - \delta_2 < \theta + t_0 - t < \theta + \delta_2$, 即 $\theta + t_0 - t \in (\theta - \delta_2, \theta + \delta_2)$, 故 $\theta + t_0 - t = \theta$. 因此

$$
|x_t(\theta) - x_{t_0}(\theta)| = |x_t(\theta) - x_t(\theta + t_0 - t)| = 0 < \frac{\varepsilon}{4}.
$$

设 θ 是右散且左稠的, 注意到 $x_t \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}$, 由定义, x_t 在 θ 有有限的左极限. 因此存在 $\delta_3 > 0$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 使得

$$|x_t(s)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{8},\quad s\in(\theta-\delta_3,\theta+\delta_3)\cap\mathbb{T}.$$

于是

$$|x_t(s)-x_t(\theta)|<|x_t(s)-\alpha|+|x_t(\theta)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $|t-t_0|<\delta_3$, 于是 $\theta+t_0-t\in(\theta-\delta_3,\theta+\delta_3)\cap\mathbb{T}$, 从而

$$|x_{t_0}(\theta)-x_t(\theta)|=|x_t(\theta+t_0-t)-x_t(\theta)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

因此, 对任意的 $\theta\in[-M,0]$, 存在 $\delta>0$, 使得若 $t_0\in(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$, 则 $\max\limits_{-M\leqslant\theta\leqslant0}|x_t(\theta)-x_{t_0}(\theta)|<\frac{\varepsilon}{4}$. 于是

$$\begin{aligned}|x_t-x_{t_0}|_h&=\int_{-\infty}^{0}h(s)|x_t-x_{t_0}|^{[s,0]}\Delta s\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-M}h(s)(|x_t|^{[s,0]}+|x_{t_0}|^{[s,0]})\Delta s+\int_{-M}^{0}h(s)|x_t-x_{t_0}|^{[s,0]}\Delta s\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-M}h(s)\left[\max\left\{|x|^{[t_0,t]},|x_{t_0}|^{[s,0]}\right\}+|x_{t_0}|^{[s,0]}\right]\Delta s\\&\quad+\int_{-M}^{0}h(s)|x_t-x_{t_0}|^{[s,0]}\Delta s\\&\leqslant\int_{-\infty}^{-M}h(s)(L+2|x_{t_0}|^{[s,0]})\Delta s+|x_t-x_{t_0}|^{[-M,0]}\leqslant L\frac{\varepsilon}{4L}+2\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.\end{aligned}$$

综上, 可以证明 x_t 在 $[0,A]$ 关于 t 是右稠连续的.

对结论 (2), 注意到

$$|\varphi|_h=\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi|^{[s,0]}\Delta s\geqslant\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi(0)|\Delta s=|\varphi(0)|$$

即可. ∎

注 8.2.1 当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 时, C_h 就是 2.1 节定义的 $\mathscr{C}_h$.

8.3 具有无限时滞的时标泛函微分方程的周期解

设 $\omega\in\mathbb{T}$ 且 $\omega>0$. 设 $\mathbb{T}$ 是 ω 周期时标. 考虑如下形式的定义在时标 $\mathbb{T}$ 上的

具有无限时滞的时标泛函微分方程:

$$x^{\Delta}(t) = -a(t, x(t))x(\sigma(t)) + f(t, x_t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{8.3.1}$$

其中, $x_t \in C_h$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$.

假设

(H_1) $a(t,x)$ 关于 x 连续, 关于 t 右稠连续且是 ω 周期的. 存在 ω 周期函数 $\alpha, \beta \in C_{rd}$, 使得 $\alpha(t) \leqslant a(t,x) \leqslant \beta(t)$ 和 $k_\alpha > 0$ (这里 k_α 由引理 8.1.10 所定义).

(H_2) $f(t,\varphi)$ 关于 φ 连续, 关于 t 右稠连续且对 $\varphi \in C_h$ 有 $f(t+\omega,\varphi) = f(t,\varphi)$; $f(t,\varphi)$ 将有界集映到有界集; 对满足 $\varphi(\theta) \geqslant 0$, $\theta \in \mathbb{T}^-$ 的 $\varphi \in C_h$ 有 $f(t,\varphi) \geqslant 0$.

为了研究 (8.3.1) 的周期性, 首先介绍 Krasnosel'skiĭ 的锥不动点定理, 亦称锥压缩-拉伸定理.

定义 8.3.1　设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. 若 $K \subset X$ 满足

(1) 对任意的 $u, v \in K, \alpha, \beta > 0$ 有 $\alpha u + \beta v \in K$,

(2) $u, -u \in K$ 蕴含了 $u = 0$,

则称非空闭子集 $K \subset X$ 为锥.

引理 8.3.1 (Krasnosel'skiĭ 不动点定理)　设 X 是 Banach 空间, $K \subset X$ 是锥, Ω_1, Ω_2 是 X 中的有界开集且满足 $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 若 $F: K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to K$ 为全连续算子且满足下列条件之一:

(1) $\|Fu\| \leqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$ 且 $\|Fu\| \geqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$;

(2) $\|Fu\| \geqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, 且 $\|Fu\| \leqslant \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$,

则 F 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 至少有一个不动点.

下面介绍一些预备结果.

令

$$P_w = \{u \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) |\ u(t+\omega) = u(t)\},$$

定义

$$\|u\| = \max_{t \in I_\omega} |u(t)|, u \in P_w,$$

其中, $I_\omega = [\kappa, \kappa+\omega] \bigcap \mathbb{T}$, $\kappa = \min\{[0,\infty) \bigcap \mathbb{T}\}$.

引理 8.3.2　设 $\{u^n\} \subset P_\omega$, $u \in P_\omega$ 且当 $n \to \infty$ 时有 $u^n \to u$, 则 $\{u_t^n\}$ 关于 t 一致地收敛到 $u_t \in C_h$.

证明　设 $\varepsilon > 0$. 因为 $\|u^n - u\| \to 0$, $n \to \infty$, 故存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对 $n \geqslant N$

有 $\|u^n - u\| < \varepsilon$. 令 $n \geqslant N$, 于是

$$|u_t^n - u_t|_h = \int_{-\infty}^{0} h(s)|u_t^n - u_t|^{[s,0]}\Delta s = \int_{-\infty}^{0} h(s)|u^n - u|^{[s+t,t]}\Delta s$$
$$\leqslant \|u^n - u\| \int_{-\infty}^{0} h(s)\Delta s < \varepsilon.$$

证毕. ■

引理 8.3.3 设 $b, p \in P_\omega$, 于是

$$x^{\Delta}(t) = -b(t)x(\sigma(t)) + p(t) \tag{8.3.2}$$

有唯一一个 ω 周期解

$$x(t) = \frac{1}{k_b}\int_{t}^{t+\omega} p(s)e_b(s,t)\Delta s. \tag{8.3.3}$$

证明 首先证明由 (8.3.3) 所定义的 x 是 (8.3.2) 的 ω 周期解. 由引理 8.1.10 有

$$x(t+\omega) = \frac{1}{k_b}\int_{t+\omega}^{t+2\omega} p(s)e_b(s,t+\omega)\Delta s = \frac{1}{k_b}\int_{t}^{t+\omega} p(s+\omega)e_b(s+\omega,t+\omega)\Delta s$$
$$= \frac{1}{k_b}\int_{t}^{t+\omega} p(s)e_b(s,t)\Delta s = x(t),$$

即 x 是 ω 周期的. 应用引理 8.1.5、引理 8.1.10 和引理 8.1.11 计算得

$$k_b\left\{x^{\Delta}(t) + b(t)x(\sigma(t))\right\}$$
$$= \int_{t}^{t+\omega} p(s)(\ominus b)(t)e_b(s.t)\Delta s + p(t+\omega)e_b(t+\omega,\sigma(t)) - p(t)e_b(t,\sigma(t))$$
$$+b(t)\left\{\int_{t}^{t+\omega} p(s)e_b(s,\sigma(t))\Delta s - \int_{t}^{\sigma(t)} p(s)e_b(s,\sigma(t))\Delta s + \int_{t+\omega}^{\sigma(t+\omega)} p(s)e_b(s,\sigma(t))\Delta s\right\}$$
$$= -b(t)\int_{t}^{t+\omega} p(s)e_b(s,\sigma(t))\Delta s + p(t)e_b(t+\omega,\sigma(t)) - p(t)e_b(t,\sigma(t))$$
$$+b(t)\left\{\int_{t}^{t+\omega} p(s)e_b(s,\sigma(t))\Delta s - \mu(t)p(t)e_b(t,\sigma(t)) + \mu(t+\omega)p(t+\omega)e_b(t+\omega,\sigma(t))\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= p(t)\left\{e_b(t+\omega,\sigma(t)) - e_b(t,\sigma(t)) - \mu(t)b(t)e_b(t,\sigma(t)) + \mu(t)b(t)e_b(t+\omega,\sigma(t))\right\}\\
&= p(t)\left\{(1+\mu(t)b(t))e_b(t+\omega,\sigma(t)) - (1+\mu(t)b(t))e_b(t,\sigma(t))\right\}\\
&= p(t)\left\{e_b(t+\omega,t) - e_b(t,t)\right\} = k_b p(t),
\end{aligned}
$$

即 x 是 (8.3.2) 的解.

设 x 是 (8.3.2) 的任意一个 ω 周期解. 设 $t_0 \in \mathbb{T}$. 由引理 8.1.2 和引理 8.1.10 有

$$
[xe_b(\cdot,t_0)]^{\Delta} = x^{\Delta}e_b(\cdot,t_0) + x^{\sigma}e_b^{\Delta}(\cdot,t_0) = e_b(\cdot,t_0)(x^{\Delta}+bx^{\sigma}) = e_b(\cdot,t_0)p.
$$

两边从 t 到 $t+\omega$ 积分有

$$
\begin{aligned}
\int_t^{t+\omega} e_b(s,t_0)p(s)\Delta s &= x(t+\omega)e_b(t+\omega,t_0) - x(t)e_b(t,t_0)\\
&= x(t)[e_b(t+\omega,t_0) - e_b(t,t_0)] = x(t)e_b(t,t_0)k_b,
\end{aligned}
$$

即 x 等于 (8.3.3) 的右端. ■

设 $u \in P_\omega$, 考虑方程

$$
x^{\Delta}(t) = -a(t,u(t))x(\sigma(t)) + f(t,u_t). \tag{8.3.4}
$$

由 (H_2), 引理 8.1.4 和定理 8.2.2 有 $f(t,u_t) \in P_\omega$. 由引理 8.3.3 知 (8.3.4) 的唯一 ω 周期解为

$$
x_u(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s)f(s,u_s)\Delta s,
$$

其中,

$$
G(t,s) = \frac{e_a(s,t)}{k_a}, \quad a(t) = a(t,u(t)), \quad u \in P_\omega.
$$

定义 $F: P_\omega \to P_\omega$,

$$
(Fu)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s)f(s,u_s)\Delta s, \quad u \in P_\omega, \quad t \in \mathbb{T}. \tag{8.3.5}
$$

显然 x 是 (8.3.1) 的 ω 周期解当且仅当 x 是 F 在 P_ω 中的不动点.

定义

$$
\gamma_1 = \inf_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant \omega} e_\alpha(s,t), \quad \gamma_2 = \sup_{0\leqslant t\leqslant s\leqslant \omega} e_\beta(s,t), \quad \delta = \frac{\gamma_1 k_\alpha}{\gamma_2 k_\beta}.
$$

由 (H_1), 引理 8.1.7 和 $G(t,s)$ 的定义, 可以断言

引理 8.3.4 $G(t,s)$ 满足

(1) $G(t,s)=G(t+\omega,s+\omega)$, $s\in[t,t+\omega]$;

(2) $A:=\dfrac{\gamma_1}{k_\beta}\leqslant G(t,s)\leqslant\dfrac{\gamma_2}{k_\alpha}:=B$, $s\in[t,t+\omega]$.

显然 $\delta=A/B$, $0<\delta\leqslant 1$. 定义

$$K_\delta=\{x\in P_\omega|\ x(t)\geqslant\delta\|x\|,\quad t\in\mathbb{T}\}.$$

不难证明 K_δ 为锥.

引理 8.3.5 $F(K_\delta)\subset K_\delta$.

证明 对任意的 $u\in K_\delta$, 往证 $Fu\in K_\delta$. 由 F 的定义易知 $Fu\in P_\omega$. 由于 $u\in K_\delta$, 故有 $u_s(\theta)=u(s+\theta)\geqslant 0$, $\theta\in\mathbb{T}^-$. 由 (H_2) 和引理 8.3.4 有 $f(s,u_s)\geqslant 0$, $(Fu)(t)\geqslant 0$,

$$(Fu)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,u_s)\Delta s\leqslant B\int_0^{\omega}f(s,u_s)\Delta s,$$

从而 $\|Fu\|\leqslant B\displaystyle\int_0^{\omega}f(s,u_s)\Delta s$. 进一步,

$$(Fu)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,u_s)\Delta s\geqslant A\int_0^{\omega}f(s,u_s)\Delta s\geqslant\frac{A}{B}\|Fu\|=\delta\|Fu\|,$$

从而 $Fu\in K_\delta$. ∎

引理 8.3.6 设 $\eta>0$, $\varOmega=\{x\in P_\omega|\ \|x\|<\eta\}$, 则 $F:K_\delta\cap\overline{\varOmega}\to K_\delta$ 是全连续的.

证明 首先证明 F 是连续的. 设

$$u^n,u\in K_\delta\cap\overline{\varOmega},\quad \|u^n-u\|\to 0,\quad (Fu^n)(t)=\int_t^{t+\omega}G_n(t,s)f(s,u_s^n)\Delta s,$$

其中,

$$G_n(t,s)=\frac{e_{a_n}(s,t)}{k_{a_n}},\quad a_n(t):=a(t,u^n(t)).$$

应用引理 8.1.11 有

$$(Fu^n)^{\Delta}(t)=\int_t^{t+\omega}(\ominus a_n)(t)G(t,s)f(s,u_s^n)\Delta s+G(\sigma(t),t+\omega)f(t,u_t^n)-G(\sigma(t),t)f(t,u_t^n)$$

$$= (\ominus a_n)(t)(Fu^n)(t)+\frac{f(t,u_t^n)}{k_a}\left\{\frac{1}{1+\mu(t)a_n(t)}e_{a_n}(t+\omega,t)-\frac{1}{1+\mu(t)a_n(t)}\right\}$$
$$= (\ominus a_n)(t)(Fu^n)(t)+\frac{f(t,u_t^n)}{1+\mu(t)a_n(t)}.$$

从而, 对 $v^n = Fu^n - Fu$ 有

$$\begin{aligned}(v^n)^\Delta(t) &= (Fu^n)^\Delta(t) - (Fu)^\Delta(t)\\ &= (\ominus a_n)(t)(Fu^n)(t) + \frac{f(t,u_t^n)}{1+\mu(t)a_n(t)} - (\ominus a)(t)(Fu)(t) - \frac{f(t,u_t)}{1+\mu(t)a(t)}\\ &= (\ominus a_n)(t)v^n(t) + f_n(t),\end{aligned}$$

其中,

$$f_n(t) = -\{(\ominus a_n)(t) - (\ominus a)(t)\}(Fu)(t) + \left\{\frac{f(t,u_t^n)}{1+a_n(t)\mu(t)} - \frac{f(t,u_t)}{1+a(t)\mu(t)}\right\}.$$

由引理 8.3.2 和 (H_2) 有 $u_t^n \to u_t$, $f(t,u_t^n) \to f(t,u_t)$, $n\to\infty$. 此外, 由于 $a(t,x)$ 在 $\{(t,x)|\ 0\leqslant t\leqslant\omega,\ |x|\leqslant\eta\}$ 上关于 x 连续且 $a(t,u^n(t))\to a(t,u(t))$ (简记为 $a_n\to a$), 故有 $f_n(t)\to 0$, $n\to\infty$. 由 (H_2) 知 f 把有界集映到有界集, 故存在 $M_1>0$, 使得对任意的 $x\in\overline{\Omega}$ 和 $s\in[t,t+\omega]$ 有 $|f(s,x_s)|\leqslant M_1$. 此外, 存在 $M_2>0$, 使得 $|a(t,x)|\leqslant M_2$, 从而

$$|f_n(t)|\leqslant 2M_2|(Fu)(t)|+2M_1\leqslant 2M_2B\omega M_1+2M_1.$$

因此 $\|v^n\|\leqslant B^*\int_0^\omega f_n(s)\Delta s$. 其中,

$$B^* = \sup_{0\leqslant t,s\leqslant\omega} G_n^*(t,s),\quad G_n^*(t,s) = \frac{e_{a_n^*}(s,t)}{k_{a_n^*}},\quad a_n^* = \ominus a_n.$$

由控制收敛定理有 $\|v^n\| = \|Fu^n - Fu\|\to 0\ (n\to\infty)$, 故 F 是连续的.

下面证明 $F(K_\delta\cap\overline{\Omega})$ 是紧致的. 实际上, 对任意的 $u\in K_\delta\cap\overline{\Omega}$ 有

$$|(Fu)(t)|\leqslant B\int_t^{t+\omega} f(s,u_s)\Delta s\leqslant B\omega M_1$$

和

$$|(Fu)^\Delta(t)| = \left|(\ominus a)(t)(Fu)(t)+\frac{f(t,u_t)}{1+a(t)\mu(t)}\right|\leqslant B\omega M_1+M_1.$$

故 $F(K_\delta\cap\overline{\Omega})$ 是一致有界且等度连续的. 由 Arzelà-Ascoli 定理, $F(K_\delta\cap\overline{\Omega})$ 是紧致的. 因此 $F: K_\delta\cap\overline{\Omega}\to K_\delta$ 是全连续的. ∎

为讨论方便起见, 引入如下记号:

$$f^0 = \lim_{|\varphi|_h \to 0} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h}, \quad f_0 = \lim_{|\varphi|_h \to 0} \min_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h},$$

$$f^\infty = \lim_{|\varphi|_h \to \infty} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h}, \quad f_\infty = \lim_{|\varphi|_h \to \infty} \min_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h},$$

$$D_\delta = \{\varphi \in \mathrm{C}_h |\ \varphi(\theta) \geqslant \delta|\varphi|_h,\ \theta \in \mathbb{T}^-\}.$$

8.3.1 纯量时标动力学方程的正周期解

设

(H_3) 存在 $K_1 > 0$, 使得对满足 $|\varphi|_h \in [\delta K_1, K_1]$ 的任意的 $\varphi \in D_\delta$ 有 $f(t,\varphi) > K_1/(A\omega)$;

(H_4) 存在 $K_2 > 0$, 使得对满足 $|\varphi|_h \leqslant K_2$ 的任意的 $\varphi \in D_\delta$ 有 $f(t,\varphi) < K_2/(B\omega)$.

定理 8.3.1 (1) 设 (H_3) 成立且 $f^0 = f^\infty = 0$, 则 (8.3.1) 至少存在两个 ω 周期解 u_1 和 u_2 且满足 $0 < \|u_1\| < K_1 < \|u_2\|$;

(2) 设 (H_4) 成立且 $f_0 = f_\infty = \infty$, 则 (8.3.1) 至少存在两个 ω 周期解 u_1 和 u_2 且 $0 < \|u_1\| < K_2 < \|u_2\|$.

证明 只证明 (1), (2) 同理可证. 由 $f^0 = 0$ 知对任意的 $0 < \varepsilon \leqslant 1/(B\omega)$, 存在 $r_0 < K_1$, 使得对任意的满足 $0 < |\varphi|_h \leqslant r_0$ 的 $\varphi \in D_\delta$ 有

$$f(t,\varphi) \leqslant \varepsilon|\varphi|_h. \tag{8.3.6}$$

令 $\Omega_{r_0} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < r_0\}$, 则对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{r_0}$ 有

$$\|u\| = r_0, \quad \delta|u_t|_h \leqslant \delta\|u\| \leqslant u_t(\theta).$$

因此 $u_t \in D_\delta$, $\delta r_0 \leqslant |u_t|_h \leqslant r_0$. 由 (8.3.5) 和 (8.3.6) 有

$$\|Fu\| \leqslant \int_0^\omega f(s,u_s)\Delta s \leqslant B\varepsilon \int_0^\omega |u_s|_h \Delta s \leqslant B\varepsilon\omega\|u\| \leqslant \|u\|,$$

即 $\|Fu\| \leqslant \|u\|$, $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{r_0}$.

另一方面, 由 $f^\infty = 0$, 对任意的 $0 < \varepsilon < 1/(2B\omega)$, 存在 $N_1 > K_1$, 使得

$$|f(t,\varphi)| \leqslant \varepsilon|\varphi|_h, \quad \varphi \in D_\delta, \quad |\varphi|_h \geqslant N_1. \tag{8.3.7}$$

设 $\Omega_{r_1} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < r_1\}$, 其中, r_1 满足

$$r_1 > N_1 + 1 + 2B\omega \sup_{\substack{t\in[0,\omega] \\ |\varphi|_h \leqslant N_1,\ \varphi\in D_\delta}} f(t,\varphi). \tag{8.3.8}$$

于是, 对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{r_1}$ 有 $\delta|u_t|_h \leqslant \delta\|u\| \leqslant u_t(\theta)$. 因此

$$u_t \in D_\delta, \quad \delta r_1 \leqslant |u_t|_h \leqslant r_1 = \|u\|.$$

由 (8.3.5), (8.3.7) 和 (8.3.8) 有

$$\begin{aligned}\|Fu\| &\leqslant B\int_t^{t+\omega} f(s,u_s)\Delta s = B\int_{I_1} f(s,u_s)\Delta s + B\int_{I_2} f(s,u_s)\Delta s \\ &\leqslant B\int_0^{\omega} \frac{r_1}{2B\omega}\Delta s + B\int_0^{\omega} \varepsilon|u_s|_h\Delta s \leqslant \frac{r_1}{2} + Br_1\varepsilon\omega < r_1 = \|u\|,\end{aligned}$$

其中,

$$I_1 = \{s \in [0,\omega] |\ |u_s|_h \leqslant N_1\}, \quad I_2 = \{s \in [0,\omega] |\ |u_s| > N_1\},$$

即

$$\|Fu\| \leqslant \|u\|, \quad u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{r_1}.$$

令 $\Omega_{K_1} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < K_1\}$, 其中, $K_1 > r_0$. 于是, 对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{K_1}$ 有 $K_1 \geqslant |u_t|_h \geqslant \delta K_1$. 由 (H_3) 有 $f(t,x_t) > K_1/(A\omega)$. 由引理 8.3.4,

$$\|Fu\| \geqslant A\int_t^{t+\omega} f(s,u_s)\Delta s > \frac{AK_1\omega}{A\omega} = K_1 = \|u\|,$$

即 $\|Fu\| \geqslant \|u\|$, $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{K_1}$. 由引理 8.3.5 和引理 8.3.6 知

$$F: K_\delta \cap (\overline{\Omega}_{r_1} \setminus \Omega_{K_1}) \to K_\delta, \quad F: K_\delta \cap (\overline{\Omega}_{K_1} \setminus \Omega_{r_0}) \to K_\delta$$

是全连续的. 从而, 由引理 8.3.1, F 在 $K_\delta \cap (\overline{\Omega}_{K_1} \setminus \Omega_{r_0})$ 和 $K_\delta \cap (\overline{\Omega}_{r_1} \setminus \Omega_{K_1})$ 中分别有至少一个不动点 u_1 和 u_2, 亦即 (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解 u_1 和 u_2 且满足 $0 < \|u_1\| < K_1 < \|u_2\|$. ∎

下面建立一个重要的引理.

引理 8.3.7 *设 (H_3) 和 (H_4) 成立, 则 (8.3.1) 至少存在一个正 ω 周期解 u 且 $\|u\|$ 介于 K_1 和 K_2 之间, 其中, K_1 和 K_2 分别由 (H_3) 和 (H_4) 所定义.*

证明 不失一般性, 设 $K_2 < K_1$. 若不然, 可以应用引理 8.3.1 (2) 证明本引理.

令 $\Omega_{K_2} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < K_2\}$, 则对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{K_2}$, 由 (8.3.5) 和 (H_4) 有

$$\|Fu\| \leqslant B\int_t^{t+\omega} f(s,u_s)\Delta s < \frac{B\omega K_2}{B\omega} = K_2 = \|u\|,$$

即对任意的 $u\in K_\delta\cap\partial\Omega_{K_2}$ 有 $\|Fu\|\leqslant\|u\|$.

令 $\Omega_{K_1}=\{u\in P_\omega|\ \|u\|<K_1\}$, 则对任意的 $u\in K_\delta\cap\partial\Omega_{K_1}$ 有 $|u_t|_h\leqslant K_1$. 由 (8.3.5) 和 (H_3) 有

$$\|Fu\|\geqslant A\int_t^{t+\omega}f(s,u_s)\Delta s>\frac{A\omega K_1}{A\omega}=K_1=\|u\|,$$

即 $\|Fu\|>\|u\|$, $u\in K_\delta\cap\partial\Omega_{K_1}$. 由引理 8.3.1, 引理得证. ■

定理 8.3.2 (1) 若 $f^0\in[0,1/(B\omega))$ 且 $f_\infty\in(1/(A\delta\omega),\infty)$, 则 (8.3.1) 至少存在一个正 ω 周期解;

(2) 若 $f^\infty\in[0,1/(B\omega))$ 且 $f_0\in(1/(A\delta\omega),\infty)$, 则 (8.3.1) 至少存在一个正 ω 周期解.

证明 首先证明结论 (1). 设 $f^0=\alpha_1\in[0,1/(B\omega))$, $f_\infty=\beta_1\in(1/(A\delta\omega),\infty)$. 对 $\varepsilon=1/(B\omega)-\alpha_1>0$, 存在充分小的 $R_1>0$, 使得对 $|\varphi|_h\leqslant R_1$ 有

$$\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h}<\alpha_1+\varepsilon=\frac{1}{B\omega},$$

即当 $|\varphi|_h\leqslant R_1$, $t\in[0,\omega]$ 时有 $f(t,\varphi)<|\varphi|_h/(B\omega)\leqslant R_1/(B\omega)$. 因此 (H_4) 成立.

对 $\varepsilon=\beta_1-1/(A\delta\omega)>0$, 存在充分大的 $R_2>0$, 使得当 $|\varphi|_h\geqslant\delta R_2$ 有

$$\min_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h}>\beta_1-\varepsilon=\frac{1}{A\delta\omega}.$$

因此, 当 $|\varphi|_h\in[\delta R_2,R_2]$,$t\in[0,\omega]$ 时有 $f(t,\varphi)>R_2\delta/(A\delta\omega)=R_2/(A\omega)$, 即 (H_3) 成立, 由引理 8.3.7, 结论 (1) 成立.

下面证明结论 (2). 设 $f_0=\alpha_2\in(1/(A\delta\omega),\infty)$, $f^\infty=\beta_2\in[0,1/B\omega)$. 对 $\varepsilon=\alpha_2-1/(A\delta\omega)>0$, 存在充分小的 $R_3<\delta R_2$, 使得当 $0<|\varphi|_h\leqslant R_3$ 时有

$$\min_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h}>\alpha_2-\varepsilon=\frac{1}{A\delta\omega}.$$

从而, 当 $|\varphi|_h\in[\delta R_3,R_3]$, $t\in[0,\omega]$ 时有 $f(t,\varphi)>\delta R_3/(A\delta\omega)=R_3/(A\omega)$, 即 (H_3) 成立. 对 $\varepsilon=1/(B\omega)-\beta_2>0$, 由 $f^\infty=\beta_2$ 知存在充分大的 $R_4>R_1$, 使得当 $|\varphi|_h>R_4$ 时有

$$\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h}<\beta_2+\varepsilon=\frac{1}{B\omega}.\tag{8.3.9}$$

为了证明 (H_4) 成立, 分两种情形进行讨论.

情形 1. 若 $\max\limits_{t\in[0,\omega]}f(t,\varphi)$ 无界, 则存在满足 $|\varphi^*|_h=R_5>R_4$ 的 $\varphi^*\in D_\delta$ 和 $t_0\in[0,\omega]$, 使得

$$f(t,\varphi)\leqslant f(t_0,\varphi^*),\quad 0<|\varphi|_h\leqslant|\varphi^*|_h=R_5.\tag{8.3.10}$$

因为 $|\varphi^*|_h = R_5 > R_4$, 由 (8.3.9) 和 (8.3.10) 有

$$f(t,\varphi) \leqslant f(t_0,\varphi^*) < \frac{|\varphi^*|_h}{B\omega} = \frac{R_5}{B\omega}, \quad 0 < |\varphi|_h \leqslant R_5, \quad t \in [0,\omega],$$

即 (H_4) 成立.

情形 2. 若 $\max\limits_{t\in[0,\omega]} f(t,\varphi)$ 有界, 则存在 $M_5 > 0$, 使得

$$f(t,\varphi) \leqslant M_5, \quad (t,\varphi) \in [0,\omega] \times D_\delta. \tag{8.3.11}$$

选取 $R_5 > M_5 B\omega$, 当 $0 < |\varphi|_h \leqslant R_5, t \in [0,\omega]$ 时, 由 (8.3.11) 有 $f(t,\varphi) \leqslant M_5 < R_5/(B\omega)$, 即 (H_4) 成立.

由引理 8.3.7, 显然结论 (2) 成立. ∎

定理 8.3.3　(1) 若 (H_4) 成立且 $f_0, f_\infty \in (1/(A\delta\omega),\infty)$, 则 (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解 u_1 和 u_2 且满足 $0 < \|u_1\| < K_2 < \|u_2\|$, 其中, K_2 由 (H_4) 所定义.

(2) 若 (H_3) 成立且 $f^0, f^\infty \in [0, 1/(B\omega))$, 则 (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解 u_1 和 u_2 且满足 $0 < \|u_1\| < K_1 < \|u_2\|$, 其中, K_1 由 (H_3) 所定义.

证明　仅证明结论 (1), 结论 (2) 同理可证. 由 $f_\infty \in (1/(A\delta\omega),\infty)$ 和定理 8.3.2 (1) 的证明知存在充分大的 $R_2 > K_2$, 使得对任意的 $\varphi \in D_\delta$ 且 $|\varphi|_h \in [\delta R_2, R_2]$ 有

$$f(t,\varphi) > \frac{R_2}{A\omega}.$$

由 $f_0 \in (1/(A\delta\omega),\infty)$ 和定理 8.3.2 (2) 的证明知存在充分小的 $R_2^* \in (0, K_2)$, 使得对任意的 $\varphi \in D_\delta$ 且 $|\varphi|_h \in [\delta R_2^*, R_2^*]$ 有

$$f(t,\varphi) > \frac{R_2^*}{A\omega}.$$

由引理 8.3.7, (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解 u_1 和 u_2 且满足

$$R_2^* < \|u_1\| < K_2 < \|u_2\| < R_2.$$

证毕. ∎

定理 8.3.4　若下列条件之一成立:

(1) $f_0 = \infty, f^\infty \in [0, 1/(B\omega))$;

(2) $f_\infty = \infty, f^0 \in [0, 1/(B\omega))$;

(3) $f^0 = 0, f_\infty \in (1/(A\delta\omega),\infty)$;

(4) $f^\infty = 0, f_0 \in (1/(A\delta\omega),\infty)$,

则 (8.3.1) 至少存在一个正 ω 周期解.

证明 设 (1) 成立. 选取 $M_6 > 1/(A\delta\omega)$. 由于 $f_0 = \infty$, 故存在常数 r_4, 使得对任意的 $\varphi \in D_\delta$ 且 $0 < |\varphi|_h \leqslant r_4$ 有

$$f(t,\varphi) \geqslant M_6 |\varphi|_h. \tag{8.3.12}$$

令 $\Omega_{r_4} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < r_4\}$, 则对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{r_4}$ 有 $\delta|u_t|_h \leqslant \delta\|u\| \leqslant u_t(\theta)$. 从而, $u_t \in D_\delta$ 且 $\delta r_4 \leqslant |u_t|_h \leqslant r_4$. 由 (8.3.5) 和 (8.3.12) 有

$$\|Fu\| \geqslant A\int_t^{t+\omega} f(s,u_s)\Delta s \geqslant AM_6\int_0^{\omega} |u_s|_h \Delta s \geqslant AM_6\delta r_4\omega \geqslant r_4 = \|u\|,$$

即对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{r_4}$ 有 $\|Fu\| \geqslant \|u\|$.

另一方面, 由 $f^\infty \in [0, 1/(B\omega))$ 和定理 8.3.2 (2), 存在 $R_5 > r_4 > 0$, 使得对任意的 $\varphi \in D_\delta$ 且 $|\varphi|_h \leqslant R_5$ 有 $f(t,\varphi) < R_5/(B\omega)$. 令 $\Omega_{R_5} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < R_5\}$, 则对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{R_5}$ 有

$$\|Fu\| \leqslant B\int_t^{t+\omega} f(s,u_s)\Delta s < \frac{B\omega R_5}{B\omega} = R_5 = \|u\|,$$

即对任意的 $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{R_5}$ 有 $\|Fu\| \leqslant \|u\|$. 由引理 8.3.1, 结论 (1) 成立. 类似地可以证明定理的其他结论, 从略. ∎

注 8.3.1 由定理 8.3.4 知若 $f_0 = \infty$, $f^\infty = 0$, 或者 $f^0 = 0$, $f_\infty = \infty$, 则 (8.3.1) 至少存在一个正 ω 周期解. 当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 时, 此结论就退化为文献 [130] 的主要结果.

定理 8.3.5 *设 (H_4) 成立. 若 $f_0 = \infty$, $f_\infty \in (1/(A\delta\omega), \infty)$, 或者 $f_\infty = \infty$, $f_0 \in (1/(A\delta\omega), \infty)$ 成立, 则 (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解 u_1 和 u_2 且满足 $0 < \|u_1\| < K_2 < \|u_2\|$, 其中, K_2 由 (H_4) 所定义.*

证明 只证明 $f_0 = \infty$, $f_\infty \in (1/(A\delta\omega), \infty)$ 情形, 其他情形同理可证. 令 $\Omega_{r_4} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < r_4\}$ 和 $f_\infty = \alpha_3$, 其中, $r_4 < r_2$. 由 $f_0 = \infty$ 和定理 8.3.4 (1) 的证明可知 $\|Fu\| \geqslant \|u\|$, $u \in K_\delta \cap \partial\Omega_{r_4}$. 令 $\Omega_{R_2} = \{u \in P_\omega |\ \|u\| < R_2\}$, 其中, $R_2 > K_2$. 由 $f_\infty = \alpha_3 \in (1/A\delta\omega, \infty)$ 定理 8.3.2 (1) 的证明可知

$$f(t,\varphi) > \frac{R_2}{A\omega}, \quad \varphi \in D_\delta \quad 且 \quad |\varphi|_h \in [\delta R_2, R_2].$$

由 (H_4) 和引理 8.3.7, (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解 u_1 和 u_2 且 $0 < \|u_1\| < K_2 < \|u_2\|$. ∎

定理 8.3.6 *设 (H_3) 成立. 若 $f^0 = 0$, $f^\infty \in [0, 1/(B\omega))$, 或者 $f^\infty = 0$, $f^0 \in [0, 1/(B\omega))$ 成立, 则 (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解 u_1 和 u_2 且 $0 < \|u_1\| < K_1 < \|u_2\|$, 其中, K_1 由 (H_3) 所定义.*

至此, 主要讨论了正周期解的存在性和多解性. 综上所述, 证明了

定理 8.3.7　若 $f_0 \in (1/(A\delta\omega), \infty]$, $f^\infty \in [0, 1/(B\omega))$, 或者 $f^0 \in [0, 1/(B\omega))$, $f_\infty \in (1/(A\delta\omega), \infty]$, 或者 (H_3), (H_4) 成立, 则 (8.3.1) 至少存在一个正 ω 周期解. 若 (H_3), $f^0, f^\infty \in [0, 1/(B\omega))$, 或者 (H_4), $f_0, f_\infty \in (1/(A\delta\omega), \infty]$ 成立, 则 (8.3.1) 至少存在两个正 ω 周期解.

下面讨论 (8.3.1) 的周期解的不存在性.

定理 8.3.8　设 R_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ 由定理 8.3.2 所定义. 若

(1)

$$f_0, f_\infty, \min_{R_3 \leqslant |\varphi|_h \leqslant \delta R_2} \frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h} \in \left(\frac{1}{A\delta\omega}, \infty\right)$$

或者

(2)

$$f^0, f^\infty, \max_{R_1 \leqslant |\varphi|_h \leqslant R_4} \frac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h} \in \left[0, \frac{1}{B\omega}\right)$$

成立, 则 (8.3.1) 不存在 ω 周期解.

证明　只证明结论 (1). 由 $f_0, f_\infty \in (1/(A\delta\omega), \infty)$ 和定理 8.3.2 的证明知存在 $R_3, R_2 > 0$, 使得

$$f(t,\varphi) > \frac{1}{A\delta\omega}|\varphi|_h, \quad 0 < |\varphi|_h \leqslant R_3; \quad f(t,\varphi) > \frac{1}{A\delta\omega}|\varphi|_h, \quad |\varphi|_h \geqslant \delta R_2.$$

于是由 $\min\limits_{R_3 \leqslant |\varphi|_h \leqslant \delta R_2} \dfrac{f(t,\varphi)}{|\varphi|_h} > \dfrac{1}{A\delta\omega}$ 有

$$f(t,\varphi) > \frac{1}{A\delta\omega}|\varphi|_h, \quad |\varphi|_h \in (0, \infty).$$

若 (8.3.1) 存在 ω 周期解 v, 则 $Fv = v$, 从而

$$\begin{aligned}\|v\| = \|Fv\| &= \left\|\int_t^{t+\omega} G(t,s)f(s,v_s)\Delta s\right\| > \int_t^{t+\omega} A\frac{1}{A\delta\omega}|v_s|_h\Delta s \\ &\geqslant \int_t^{t+\omega} \frac{1}{\omega\delta}|v_s(0)|\Delta s = \int_t^{t+\omega} \frac{1}{\omega\delta}|v(s)|\Delta s \geqslant \int_t^{t+\omega} \frac{1}{\omega\delta}\delta\,\|v\|\,\Delta s = \|v\|,\end{aligned}$$

矛盾! 故结论 (1) 成立. 结论 (2) 同理可证, 从略. ∎

尽管已经建立了 (8.3.1) 的周期解不存在的充分性判据, 但这些判据依赖于定理 8.3.2 证明中的参数. 类似于文献 [144], 考虑系统

$$x^{\Delta}(t) = -a(t, x(t))x(\sigma(t)) + \lambda f(t, x_t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{8.3.13}$$

其中, λ 为独立于 f 的参数. 类似上面的讨论, 容易得到如下结论:

定理 8.3.9 *若 $f_0 > 0$, $f_\infty > 0$(或 f^0, $f^\infty < \infty$), 则对充分大 (或小) 的 $\lambda > 0$, (8.3.13) 不存在 ω 周期解.*

注 8.3.2 类似上面的讨论, 同样可以建立 (8.3.13) 存在至少一个或两个正周期解的充分性判据. 通常, (8.3.13) 的周期解存在性或不存在性的判据中都含有 "…… 对充分小或充分大的 $\lambda > 0$ ……" 的论断 (详见定理 8.3.9 和文献 [144]), 这显然不够具体, 所以上面主要讨论了系统 (8.3.1), 而没有过多讨论 (8.3.13). 此外, 正如在定理 8.3.8 和定理 8.3.9 中所见, 讨论周期解的不存在性时, 讨论形如 (8.3.13) 的系统相对更为便利.

注 8.3.3 本小节主要讨论了系统 (8.3.1) 的正周期解的存在性或不存在性. 事实上, 可以对系统

$$x^{\Delta}(t) = a(t, x(t))x(\sigma(t)) - f(t, x_t) \tag{8.3.14}$$

建立正周期解存在或不存在的判据, 这些判据与系统 (8.3.1) 的相应结果完全相同, 且证明过程也几乎完全一样. 唯一的差别是 $G(t,s)$ 定义为

$$G(t,s) = \frac{e_a(t+\omega, s)}{k_a}.$$

注 8.3.4 当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 时, (8.3.1) 分别退化为

$$x'(t) = -a(t, x(t))x(t) + f(t, x_t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{8.3.15}$$

和

$$x(t+1) - x(t) = -a(t, x(t))x(t+1) + f(t, x_t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

注意到 (8.3.15) 的一种离散化形式为

$$x(t+1) - x(t) = -a(t, x(t))x(t) + f(t, x_t), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

显然此系统不能被 (8.3.1) 所包含. 为了研究此系统的周期解. 只需研究系统

$$x^{\Delta}(t) = a(t, x(t))x(t) - f(t, x_t), \quad t \in \mathbb{T} \tag{8.3.16}$$

的周期解的存在性和不存在性. 与 (8.3.1) 的讨论完全相同, 不难证明定理 8.3.7 和定理 8.3.8 的结论对系统 (8.3.16) 都成立. 仅有的差别是 $G, \gamma_1, \gamma_2, A, B$ 应如下定义:

$$G(t,s) = \frac{e_a(t+\omega, s)}{k_a}, \quad \gamma_1 = \inf_{0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \omega} e_\alpha(t+\omega, s),$$

$$\gamma_2 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \omega} e_\beta(t+\omega, s), \quad A = \frac{\gamma_1}{k_\beta}, \quad B = \frac{\gamma_2}{k_\alpha}.$$

此外, 只要 $1/(1-\mu(s)a(s))>0$ 且有界就可以对

$$x^{\Delta}(t)=-a(t,x(t))x(t)+f(t,x_t) \tag{8.3.17}$$

的周期解的存在性和不存在性建立相同的判据. 为简洁起见, 从略.

注 8.3.5 当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 时, (8.3.1) 退化为 (8.3.15). 系统 (8.3.15) 及其一些特殊形式的周期解的存在性被广泛地进行了研究, 参见文献 [179] 及其所引文献. 因此, 本小节的结果更具有一般性.

8.3.2 高维时标动力学系统的周期解

8.3.1 节研究了定义在一般时标上的具有无限时滞的纯量时标动力学方程的周期解问题. 本小节讨论一般的 n 维系统

$$X^{\Delta}(t)=-A(t)X(\sigma(t))+G(t,X_t), \tag{8.3.18}$$

其中, $A(t)=\operatorname{diag}[a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t)]$, $a_i\in \mathrm{C_{rd}}$, $a_i(t+\omega)=a_i(t)$ 且 $k_{a_i}>0$, $i\in\{1,\cdots,n\}$. $G=(g_1,g_2,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$ 定义在 $\mathbb{R}\times \mathrm{C}_h$ 上, $G(t,\phi)$ 关于 t 右稠连续、关于 ϕ 连续且 $G(t+\omega,\phi)=G(t,\phi)$. 此外, $g_i(t,\phi)$ 将有界集映到有界集且对满足 $\phi_i(\theta)\geqslant 0,\theta\in\mathbb{R}^-$ 的 $\phi\in \mathrm{C}_h$ 有 $g_i(t,\phi)\geqslant 0$.

为方便起见, 引入如下记号:

$$G_i(t,s)=\frac{e_{a_i}(s,t)}{k_{a_i}},\quad \delta_i=\frac{1}{e_{a_i}(\omega,0)},\quad \delta=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\delta_i\},$$

$$A_i=\frac{\delta_i}{1-\delta_i},\quad B_i=\frac{1}{1-\delta_i},\quad A_0=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad B_0=\sum_{i=1}^{n}B_i,$$

$$P=\{u\in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)|u(t+\omega)=u(t),t\in\mathbb{R},u_i\in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R})\},$$

$$\|u\|=\max_{t\in[0,\omega]}\sum_{i=1}^{n}|u_i(t)|,\quad u\in P,$$

$$E_\delta=\{\phi\in \mathrm{C}_h|\ \phi_i(\theta)\geqslant\delta|\phi_i|_h,\ \theta\in\mathbb{R}^-\},\quad K=\{x\in P|\ x_i(t)\geqslant 0,\ x_i(t)\geqslant\delta|x_i|\},$$

$$g_i^0=\lim_{|\varphi|_h\to 0}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g_i(t,\varphi)}{|\varphi|_h},\quad g_0^i=\lim_{|\varphi|_h\to 0}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{g_i(t,\varphi)}{|\varphi|_h},$$

$$g_i^\infty=\lim_{|\varphi|_h\to \infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g_i(t,\varphi)}{|\varphi|_h},\quad g_\infty^i=\lim_{|\varphi|_h\to \infty}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{g_i(t,\varphi)}{|\varphi|_h},$$

$$G^0=\max_{1\leqslant i\leqslant n}g_i^0,\quad G^\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}g_i^\infty,\quad G_0=\min_{1\leqslant i\leqslant n}g_0^i,\quad G_\infty=\min_{1\leqslant i\leqslant n}g_\infty^i.$$

下面不加证明地给出一些基本结果, 其证明与前节类似.

引理 8.3.8 设 $A,Q\in P$,

$$A(t)=\operatorname{diag}[a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t)],\quad Q(t)=(q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t))^{\mathrm{T}},$$

则 $X^{\Delta}(t)=-A(t)X(\sigma(t))+Q(t)$ 有唯一一个 ω 周期解

$$X(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)),$$

其中,

$$x_i(t)=\int_t^{t+\omega}G_i(t,s)q_i(s)\Delta s.$$

对任意的 $u\in P$, 考虑方程

$$X^{\Delta}(t)=-A(t)X(\sigma(t))+G(t,u_t). \tag{8.3.19}$$

由引理 8.3.8 知 (8.3.19) 的唯一 ω 周期解为

$$X_u(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)),$$

其中,

$$x_i(t)=\int_t^{t+\omega}G_i(t,s)g_i(s,u_s)\Delta s.$$

定义算子 $F:K\to P$, 其分量 $(F_1,F_2,\cdots,F_n)$ 为

$$(F_iu)(t)=\int_t^{t+\omega}G_i(t,s)g_i(s,u_s)\Delta s,\quad u\in P_\omega,\quad t\in\mathbb{T}.$$

显然, X 是 (8.3.18) 的 ω 周期解当且仅当 X 是 F 在 K 中的不动点. 不难证明 $F(K)\subset K$. 设 η 为正常数, 定义 $\Omega=\{x\in P|\ |x|\leqslant\eta\}$, 则 $F:K\cap\overline{\Omega}\to K$ 是全连续的.

基于 $G_0,G_\infty,G^\infty,G^0$, 可以对 (8.3.18) 建立与定理 8.3.7 和定理 8.3.8 完全相同的 ω 周期解存在及不存在性的判据. 为简单起见, 作为例子, 只证明其中一种情形. 设 $G^0=0$, $G_\infty=\infty$.

定理 8.3.10 若 $G^0=0$,$G_\infty=\infty$, 则 (8.3.18) 至少存在一个正 ω 周期解.

证明 由于 $G^0=0$, 故 $g_i^0=0$. 选取 $\varepsilon>0$, 使得 $\varepsilon B_0\omega<1$. 于是, 存在 s_1, 使得 $g_i(t,\phi)\leqslant\varepsilon|\phi|_h$, $0<|\phi|_h\leqslant s_1$, $\phi\in E_\delta$. 令 $\Omega_1=\{x\in P|\ |x|<s_1\}$, 则对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_1$ 有 $u_t^i(\theta)\geqslant\delta|u_t^i|_h$ 和 $\delta|u|\leqslant|u_t|_h\leqslant|u|$, 故 $u_t\in E_\delta$. 因此

$$\begin{aligned}\|Fu\|&=\sum_{i=1}^n\int_t^{t+\omega}G_i(t,s)g_i(s,u_s)\Delta s\leqslant\sum_{i=1}^nB_i\int_0^{\omega}g_i(s,u_s)\Delta s\\&\leqslant\sum_{i=1}^nB_i\int_0^{\omega}\varepsilon|u_s|_h\Delta s\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^nB_i\int_0^{\omega}|u|\Delta s<|u|.\end{aligned}$$

另一方面, 设 $G_\infty=\infty$. 选取 $M\delta\omega A_0>1$. 易知存在常数 $s_0>s_1$, 使得 $g_i(t,\varphi)>M|\varphi|_h$, $|\varphi|_h\geqslant s_0$, $\varphi\in E_\delta$. 令 $s_2=s_0/\delta$, $\Omega_2=\{x\in P|\ |x|<s_2\}$, 则对任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_2$ 有 $u_t\in E_\delta$ 和

$$
\begin{aligned}
|u_t|_h&=\int_{-\infty}^{0}h(s)\sup_{s\leqslant\theta\leqslant 0}\sum_{i=1}^{n}|u_t^i(\theta)|^{[s,0]}\Delta s\geqslant\int_{-\infty}^{0}h(s)\sup_{s\leqslant\theta\leqslant 0}\sum_{i=1}^{n}\delta|u_t^i|\Delta s\\
&=\delta|u|=\delta s_2=s_0,
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\|Fu\|&=\sum_{i=1}^{n}\int_{t}^{t+\omega}G_i(t,s)g_i(s,u_s)\Delta s\geqslant\sum_{i=1}^{n}A_i\int_{0}^{\omega}g_i(s,u_s)\Delta s\\
&\geqslant\sum_{i=1}^{n}A_i\int_{0}^{\omega}M|u_s|_h\Delta s\geqslant M\delta|u|\omega A_0\geqslant|u|.
\end{aligned}
$$

由 (8.3.1), (8.3.10) 和 (8.3.11) 知 F 存在不动点 $u_1\in K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$, 使得 $(Fu_1)(t)=u_1(t)$ 且 $u_1^i(t)\geqslant\delta\left\|u_1^i\right\|\geqslant\delta s_1>0$. 因此, u_1 是 (8.3.18) 的 ω 周期解. ■

注 8.3.6 本小节比较系统地讨论了几类定义在一般时标上的具有无限时滞的时标动力学方程的周期解的存在性和不存在性, 所研究的系统非常一般, 可以包含许多微分方程或差分方程作为特例, 特别地, 也包含许多数学生物学模型作为特例, 详见文献 [7] 及其所引文献.

注 8.3.7 本节的研究表明, 当应用 Krasnosel′skiĭ's 不动点定理研究微分方程及相应差分方程的周期解的存在性时, 没有必要分别进行研究, 在时标的意义下可以统一研究.

注 8.3.8 本节研究的大前提是系统 (8.3.1) 的初值问题的解的基本理论成立. 但文献 [7] 并未对此问题进行深入讨论. 事实上, 时标动力学方程 (特别是具有有时滞的时标动力学方程) 的基本理论的研究尚不深入, 是一个非常值得考虑的研究方向.

8.4 重合度与时标动力学方程的周期解

重合度理论是研究存在性问题的主要工具[63]. 近年来, 被广泛地应用于研究常 (泛函) 微分方程[45, 56, 58, 59, 167]、脉冲微分方程[91, 187]、差分方程[52, 57] 的周期解的存在性, 取得了很多新研究成果, 成为研究周期性的主要方法之一. 但应用该方法研究时标动力学方程周期性的工作尚不多见[8, 183]. 本节介绍文献 [8] 的主要工作.

8.4.1 解的先验估计与不等式

为了讨论周期解的存在性, 首先引入重合度理论中的连续性定理[63].

设 X, Z 是赋范向量空间, $L: \mathrm{Dom}L \subset X \to Z$ 为线性映射, $N: X \to Z$ 为连续映射. 如果 $\dim\mathrm{Ker}L = \mathrm{codim}\mathrm{Im}L < +\infty$ 且 $\mathrm{Im}L$ 为 Z 中闭子集, 则称映射 L 为指标为零的 Fredholm 映射. 如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射且存在连续投影 $P: X \to X$ 及 $Q: Z \to Z$, 使得 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}(I-Q)$, 则 $L|_{\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P}: (I-P)X \to \mathrm{Im}L$ 可逆, 设其逆映射为 K_P. 设 Ω 为 X 中的有界开集, 如果 $QN(\bar{\Omega})$ 有界且 $K_P(I-Q)N: \bar{\Omega} \to X$ 是紧的, 则称 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的. 由于 $\mathrm{Im}Q$ 与 $\mathrm{Ker}L$ 同构, 因而存在同构映射 $J: \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$.

引理 8.4.1 *设 L 是指标为零的 Fredholm 映射, N 在 $\bar{\Omega}$ 是 L 紧的. 假设*

(a) 对任意的 $\lambda \in (0,1)$, 方程 $Lx = \lambda Nx$ 的解满足 $x \notin \partial\Omega$;

(b) 对任意的 $x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega, QNx \neq 0$, 而且 $\deg\{JQN, \Omega\cap\mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$, 则方程 $Lx = Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L \cap \bar{\Omega}$ 内至少存在一个解.

应用重合度理论研究周期解的存在性, 一个关键的问题是构造满足连续性定理条件的集合 Ω, 即进行 "解的先验估计". 在进行 "解的先验估计" 时, 下面的积分不等式扮演着重要的角色:

引理 8.4.2 *设 $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 为 ω 周期的, 则对任意取定的 $t_1, t_2 \in [0,\omega]$ 和任意的 $t \in \mathbb{R}$ 有*

$$f(t) \leqslant f(t_1) + \int_0^\omega |f'(s)|\mathrm{d}s, \quad f(t) \geqslant f(t_2) - \int_0^\omega |f'(s)|\mathrm{d}s.$$

文献 [101] 对引理 8.4.2 作了改进, 得到了下面的不等式:

引理 8.4.3 *设 $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 为 ω 周期的, 则对任意取定的 $t_1 \in [0,\omega]$ 有*

$$\|f\|_0 \leqslant |f(t_1)| + \frac{1}{2}\int_0^\omega |f'(s)|\mathrm{d}s,$$

其中, $\|x\|_0 = \max\limits_{t\in[0,\omega]} |x(t)|$.

以此不等式为基础, 许多学者应用重合度理论中的连续性定理研究了常 (泛函) 微分方程、脉冲微分方程模型的周期解的存在性, 得到了许多好的结果. 一个自然的问题是否能应用重合度理论中的连续性定理研究差分方程周期解的存在性? 问题解决的关键在于如何对差分方程进行 "解的先验估计". 一个直接的想法是: 能否对差分方程建立类似于引理 8.4.2 的不等式.

为了应用重合度理论中的连续性定理研究差分方程周期解的存在性, 2002 年, 作者在文献 [52] 中建立了如下的不等式:

引理 8.4.4　设 $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ 是 ω 周期的, 则对任意取定的 $k_1,k_2\in I_\omega=\{0,1,\cdots,\omega-1\}$ 和任意的 $k\in\mathbb{Z}$ 有

$$g(k)\leqslant g(k_1)+\sum_{s=0}^{\omega-1}|g(s+1)-g(s)|,\quad g(k)\geqslant g(k_2)-\sum_{s=0}^{\omega-1}|g(s+1)-g(s)|.$$

此不等式在应用重合度理论中的连续性定理研究差分方程周期解的存在性时发挥了重要的作用.

作者的研究经验表明, 应用重合度理论中的连续性定理研究微分方程及其相应的离散化系统 (差分方程) 的周期解的存在性有许多相似之处, 如文献 [52] 和 [58], [167] 和 [57] 等, 作者曾致力于建立新的符号体系, 力图将微分方程系统及其离散化系统的周期解问题进行统一研究. 2004 年, Bohner 教授告知本书第二作者, 我们在论文 [159] 中对初值点的分类思想与时标中点的分类思想非常类似, 这时, 时标微积分进入作者的视野.

2006 年, Bohner 等[8] 首次应用重合度理论中的连续性定理研究了时标动力学方程周期解的存在性, 建立了应用连续性定理研究时标动力学方程周期性的一般性框架. 为了对时标动力学方程进行 "解的先验估计", 建立了如下的时标微积分不等式:

引理 8.4.5　设 $x\in\mathbb{C}^1_{\rm rd}\bigcap\mathbb{C}^\omega_{\rm rd}$, 则对任意的 $\xi\in I_\omega=[\kappa,\kappa+\omega]\bigcap\mathbb{T}$, $\kappa=\min\{[0,\infty)\bigcap\mathbb{T}\}, t\in\mathbb{T}$ 有

$$f(t)\leqslant f(\xi)+\int_{I_\omega}|f^\Delta(s)|\,\Delta s,\quad f(t)\geqslant f(\xi)-\int_{I_\omega}|f^\Delta(s)|\,\Delta s,$$

其中, $\mathbb{C}^\omega_{\rm rd}$ 表示定义在 $\mathbb{T}$ 上的最小正周期为 ω 的实右稠连续函数构成的集合, 即 $\mathbb{C}^\omega_{\rm rd}=\{x(t)\in\mathbb{C}_{\rm rd}|x(t)=x(t+\omega),\forall t\in\mathbb{T}\}$.

2007 年, 张冰冰和范猛[181] 将引理 8.4.5 改进为

引理 8.4.6　设 $x\in\mathbb{C}^1_{\rm rd}\bigcap\mathbb{C}^\omega_{\rm rd}$, 则对任意的 $\xi\in I_\omega=[\kappa,\kappa+\omega]\bigcap\mathbb{T}$, $\kappa=\min\{[0,\infty)\bigcap\mathbb{T}\}, t\in\mathbb{T}$ 有

$$x(t)\leqslant x(\xi)+\frac{1}{2}\int_{I_\omega}|x^\Delta(s)|\,\Delta s,\quad x(t)\geqslant x(\xi)-\frac{1}{2}\int_{I_\omega}|x^\Delta(s)|\,\Delta s$$

且上述不等式中系数 1/2 是最优的.

8.4.2　捕食者–食饵系统的周期解

设 $\mathbb{T}$ 是 ω 周期时标. 为讨论方便起见, 引入一些基本记号

$$\kappa=\min\{[0,\infty)\cap\mathbb{T}\},\quad I_\omega=[\kappa,\kappa+\omega]\cap\mathbb{T},$$

$$g^u=\sup_{t\in\mathbb{T}}g(t),\quad g^l=\inf_{t\in\mathbb{T}}g(t),\quad \overline{g}=\frac{1}{\omega}\int_{I_\omega}g(s)\Delta s=\frac{1}{\omega}\int_{\kappa}^{\kappa+\omega}g(s)\Delta s,$$

其中, $g \in C_{rd}(\mathbb{T})$ 是 ω 周期的, 即 $g(t+\omega)=g(t)$, $t\in\mathbb{T}$.

考虑时标动力学方程系统

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t)=a(t)-b(t)\exp\{x(t)\}-\dfrac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}, \\ y^{\Delta}(t)=-d(t)+\dfrac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}, \end{cases} \tag{8.4.1}$$

其中, $a,b,c,d,f,\alpha,\beta,\gamma\in C_{rd}(\mathbb{T})$ 是 ω 周期的且

$$\overline{a},\overline{d},\gamma^{l}>0,\quad b(t),c(t),f(t),\alpha(t),\beta(t)\geqslant 0,\quad t\in\mathbb{T}. \tag{8.4.2}$$

设 $\tilde{x}(t)=\exp\{x(t)\}$, $\tilde{y}(t)=\exp\{y(t)\}$. 若 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, 则 (8.4.1) 退化为具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应的捕食者-食饵系统

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t)=\tilde{x}(t)\left[a(t)-b(t)\tilde{x}(t)-\dfrac{c(t)\tilde{y}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right], \\ \tilde{y}'(t)=\tilde{y}(t)\left[-d(t)+\dfrac{f(t)\tilde{x}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right], \end{cases} \tag{8.4.3}$$

其中, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ 分别表示食饵和捕食者种群的密度. 系统 (8.4.3) 被许多学者进行了广泛的研究 (参见文献 [45] 及所引文献).

若 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, 则 (8.4.1) 为

$$\begin{cases} \tilde{x}(t+1)=\tilde{x}(t)\exp\left\{a(t)-b(t)\tilde{x}(t)-\dfrac{c(t)\tilde{y}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right\}, \\ \tilde{y}(t+1)=\tilde{y}(t)\exp\left\{-d(t)+\dfrac{f(t)\tilde{x}(t)}{\alpha(t)+\beta(t)\tilde{x}(t)+\gamma(t)\tilde{y}(t)}\right\}, \end{cases} \tag{8.4.4}$$

此系统是 (8.4.3) 的离散化近似, 也是具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应的离散型捕食者-食饵系统. 因为 (8.4.1) 包含 (8.4.3) 和 (8.4.4) 作为特例, 因此也称 (8.4.1) 为时标上具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应的捕食者-食饵系统.

为了证明系统 (8.4.1) 的周期解的存在性, 首先将问题纳入到重合度理论的框架之内. 定义

$$\mathscr{L}^{\omega}=\{(u,v)\in C(\mathbb{T},\mathbb{R}^2)|\ u(t+\omega)=u(t),\ v(t+\omega)=v(t)\ \text{对所有}\ t\in\mathbb{T}\},$$

$$\|(u,v)\|=\max_{t\in I_{\omega}}|u(t)|+\max_{t\in I_{\omega}}|v(t)|,\quad (u,v)\in\mathscr{L}^{\omega}.$$

不难证明, 在范数 $\|\cdot\|$ 下, $\mathscr{L}^{\omega}$ 是 Banach 空间. 令

$$\mathscr{L}_0^{\omega}=\{(u,v)\in\mathscr{L}^{\omega}|\ \overline{u}=0,\ \overline{v}=0\},$$

$$\mathscr{L}_c^{\omega}=\left\{(u,v)\in\mathscr{L}^{\omega}|\ (u(t),v(t))\equiv(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{T}\right\}.$$

容易证明, $\mathscr{L}_0^\omega$ 和 $\mathscr{L}_c^\omega$ 是 $\mathscr{L}^\omega$ 的闭线性子空间且 $\mathscr{L}^\omega = \mathscr{L}_0^\omega \oplus \mathscr{L}_c^\omega$, $\dim \mathscr{L}_c^\omega = 2$.

定理 8.4.1　设 (8.4.2) 成立. 若

$$\overline{a - c/\gamma} > 0, \quad (\bar{f} - \bar{d}\beta^u)(\overline{a - c/\gamma})\exp\{-(\overline{a + |a|})\omega\} - \bar{b}\,\bar{d}\alpha^u > 0, \tag{8.4.5}$$

则 (8.4.1) 至少存在一个 ω 周期解.

证明　定义 $X = Z = \mathscr{L}^\omega$,

$$N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \dfrac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}} \\ -d(t) + \dfrac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}} \end{pmatrix};$$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^\Delta \\ y^\Delta \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

于是 $\operatorname{Ker} L = \mathscr{L}_c^\omega$, $\operatorname{Im} L = \mathscr{L}_0^\omega$, $\dim \operatorname{Ker} L = 2 = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$. 由于 $\mathscr{L}_0^\omega$ 在 $\mathscr{L}^\omega$ 中是闭的, 故 L 是指标为零的 Fredholm 映射. 不难证明, P 和 Q 是连续投影且使得 $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$, $\operatorname{Im} L = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I - Q)$. 此外, L 的广义逆 $K_P : \operatorname{Im} L \to \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Dom} L$ 存在且为

$$K_p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - \overline{X} \\ Y - \overline{Y} \end{pmatrix}, \quad \text{其中,} \quad X(t) = \int_\kappa^t x(s)\Delta s,\ Y(t) = \int_\kappa^t y(s)\Delta s.$$

于是

$$QN\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_\kappa^{\kappa+\omega}\left[a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \dfrac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t \\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_\kappa^{\kappa+\omega}\left[-d(t) + \dfrac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t) + \beta(t)\exp\{x(t)\} + \gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t \end{pmatrix}.$$

$$K_p(I - Q)N\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\kappa^t N_1(s)\Delta s - \frac{1}{\omega}\int_\kappa^{\kappa+\omega}\int_\kappa^t N_1(s)\Delta s\Delta t - \left(t - \kappa - \frac{1}{\omega}\int_\kappa^{\kappa+\omega}(t - \kappa)\Delta t\right)\overline{N_1} \\ \displaystyle\int_\kappa^t N_2(s)\Delta s - \frac{1}{\omega}\int_\kappa^{\kappa+\omega}\int_\kappa^t N_2(s)\Delta s\Delta t - \left(t - \kappa - \frac{1}{\omega}\int_\kappa^{\kappa+\omega}(t - \kappa)\Delta t\right)\overline{N_2} \end{pmatrix}.$$

显然, QN 和 $K_p(I - Q)N$ 连续. 由 Arzelà-Ascoli 定理, 易证对任意的 $\Omega \subset X$, $\overline{K_p(I - Q)N(\overline{\Omega})}$ 是紧致的. 此外, $QN(\overline{\Omega})$ 有界. 故 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L 紧的.

下面寻找引理 8.4.1 中的有界开集 Ω. 对算子方程 $Lx = \lambda Nx$, $Ly = \lambda Ny$, $\lambda \in (0,1)$ 有

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = \lambda\left[a(t) - b(t)\exp\{x(t)\} - \dfrac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right], \\ y^{\Delta}(t) = \lambda\left[-d(t) + \dfrac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]. \end{cases} \tag{8.4.6}$$

对任意给定的 $\lambda \in (0,1)$, 设 $(x,y) \in X$ 是系统 (8.4.6) 的任一解. 对 (8.4.6) 在 $[\kappa, \kappa+\omega]$ 积分得

$$\begin{cases} \bar{a}\omega = \displaystyle\int_{\kappa}^{\kappa+\omega}\left[b(t)\exp\{x(t)\} + \dfrac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t, \\ \bar{d}\omega = \displaystyle\int_{\kappa}^{\kappa+\omega}\left[\dfrac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\right]\Delta t. \end{cases} \tag{8.4.7}$$

由 (8.4.6) 和 (8.4.7) 有

$$\begin{aligned} \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} |x^{\Delta}(t)|\Delta t \leqslant{}& \lambda\left[\int_{\kappa}^{\kappa+\omega}|a(t)|\Delta t + \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} b(t)\exp\{x(t)\}\Delta t\right. \\ &\left. + \int_{\kappa}^{\kappa+\omega}\frac{c(t)\exp\{y(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\Delta t\right] \\ ={}& \lambda(\overline{a+|a|})\omega < (\overline{a+|a|})\omega, \\ \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} |y^{\Delta}(t)|\Delta t \leqslant{}& \lambda\left[\int_{\kappa}^{\kappa+\omega}|d(t)|\Delta t + \int_{\kappa}^{\kappa+\omega}\frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x(t)\}+\gamma(t)\exp\{y(t)\}}\Delta t\right] \\ ={}& \lambda(\overline{d+|d|})\omega < (\overline{d+|d|})\omega. \end{aligned}$$

因为 $(x,y) \in X$, 故存在 $\xi_i, \eta_i \in [\kappa, \kappa+\omega]$, $i \in \{1,2\}$, 使得

$$\begin{cases} x(\xi_1) = \min\limits_{t\in[\kappa,\kappa+\omega]} x(t), \quad x(\eta_1) = \max\limits_{t\in[\kappa,\kappa+\omega]} x(t), \\ y(\xi_2) = \min\limits_{t\in[\kappa,\kappa+\omega]} y(t), \quad y(\eta_2) = \max\limits_{t\in[\kappa,\kappa+\omega]} y(t). \end{cases} \tag{8.4.8}$$

由 (8.4.8) 和 (8.4.7) 的第一个方程有

$$\bar{a}\omega \leqslant \int_{\kappa}^{\kappa+\omega}\left[b(t)\exp\{x(\eta_1)\} + \frac{c(t)}{\gamma(t)}\right]\Delta t = \bar{b}\omega\exp\{x(\eta_1)\} + \overline{(c/\gamma)}\omega.$$

于是

$$x(\eta_1) \geqslant \ln\left\{\frac{\overline{a - c/\gamma}}{\overline{b}}\right\} =: l_1.$$

由引理 8.4.5 有

$$x(t) \geqslant x(\eta_1) - \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} |x^{\Delta}(t)|\Delta t > l_1 - (\overline{a + |a|})\omega =: H_2. \tag{8.4.9}$$

另一方面, 由 (8.4.8) 和 (8.4.7) 的第一个方程有

$$\overline{a}\omega \geqslant \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} b(t)\exp\{x(\xi_1)\}\Delta t = \overline{b}\omega\exp\{x(\xi_1)\},$$

即 $x(\xi_1) \leqslant \ln(\overline{a}/\overline{b}) =: L_1$. 由引理 8.4.5 有

$$x(t) \leqslant x(\xi_1) + \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} |x^{\Delta}(t)|\Delta t < L_1 + (\overline{a + |a|})\omega =: H_1,$$

再由 (8.4.9) 有 $\max\limits_{t\in[\kappa,\kappa+\omega]} |x(t)| \leqslant \max\{|H_1|, |H_2|\} =: B_1$. 由 (8.4.8) 和 (8.4.7) 的第二个方程有

$$\begin{aligned}\overline{d}\omega &\leqslant \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\beta^l\exp\{x(t)\} + \gamma^l\exp\{y(t)\}}\Delta t \leqslant \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \frac{f(t)\mathrm{e}^{H_1}}{\beta^l\mathrm{e}^{H_1} + \gamma^l\exp\{y(\xi_2)\}}\Delta t \\ &= \frac{\omega\overline{f}\mathrm{e}^{H_1}}{\beta^l\mathrm{e}^{H_1} + \gamma^l\exp\{y(\xi_2)\}},\end{aligned}$$

于是 $y(\xi_2) \leqslant \ln\left(\dfrac{(\overline{f} - \overline{d}\beta^l)\mathrm{e}^{H_1}}{\overline{d}\gamma^l}\right) =: L_2$. 由引理 8.4.5,

$$y(t) \leqslant y(\xi_2) + \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} |y^{\Delta}(t)|\Delta t < L_2 + (\overline{d + |d|})\omega =: H_3. \tag{8.4.10}$$

由 (8.4.7), 还有

$$\begin{aligned}\overline{d}\omega &\geqslant \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \frac{f(t)\exp\{x(t)\}}{\alpha^u + \beta^u\exp\{x(t)\} + \gamma^u\exp\{y(\eta_2)\}}\Delta t \\ &\geqslant \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \frac{f(t)\mathrm{e}^{H_2}}{\alpha^u + \beta^u\mathrm{e}^{H_2} + \gamma^u\exp\{y(\eta_2)\}}\Delta t.\end{aligned}$$

于是

$$\exp\{y(\eta_2)\} \geqslant \frac{(\overline{f}-\overline{d}\beta^u)\dfrac{\overline{a-c/\gamma}}{\overline{b}}\exp\{-(\overline{a+|a|})\omega\}-\overline{d}\alpha^u}{\overline{d}\gamma^u} =: l_2^*.$$

由 (8.4.5) 有 $l_2^* > 0$, 故 $y(\eta_2) \geqslant \ln(l_2^*) =: l_2$. 由引理 8.4.5 有

$$y(t) \geqslant y(\eta_2) - \int_{\kappa}^{\kappa+\omega} |y^{\Delta}(t)|\Delta t > l_2 - \omega(\overline{d+|d|}) =: H_4,$$

从而由 (8.4.10) 有 $\max\limits_{t\in[\kappa,\kappa+\omega]}|y(t)| \leqslant \max\{|H_3|,|H_4|\} =: B_2$. 显然, B_1 和 B_2 与 λ 的选取无关. 令 $B = B_1+B_2+B_3$, 其中, $B_3 > 0$ 充分大, 使得 $B_3 \geqslant |l_1|+|L_1|+|l_2|+|L_2|$.

考虑代数方程

$$\begin{cases} \overline{a} - \overline{b}\exp\{x\} - \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \dfrac{\nu c(t)\exp\{y\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t = 0, \\ -\overline{d} + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \dfrac{f(t)\exp\{x\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t = 0, \end{cases} \tag{8.4.11}$$

其中, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\nu\in[0,1]$ 为参数. 对 $\nu\in[0,1]$, 与上面类似, 可以证明 (8.4.11) 的任意解 (x^*,y^*) 满足

$$l_1 \leqslant x^* \leqslant L_1 \quad 和 \quad l_2 \leqslant y^* \leqslant L_2. \tag{8.4.12}$$

定义 $\Omega = \{(x,y)\in X|\ \|(x,y)\| < B\}$. 显然, Ω 满足引理 8.4.1 中的条件 (a). 若 $(x,y)\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L = \partial\Omega\cap\mathbb{R}^2$, 则 (x,y) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的向量满足 $\|(x,y)\| = |x|+|y| = B$. 于是由 (8.4.12) 和 B 的定义有

$$QN\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} - \overline{b}\exp\{x\} - \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \dfrac{c(t)\exp\{y\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t \\ -\overline{d} + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\kappa}^{\kappa+\omega} \dfrac{f(t)\exp\{x\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t \end{pmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由 $\operatorname{Im}Q = \operatorname{Ker}L$, 可选取 $J = I$. 为了计算 Brouwer 度, 考虑同伦

$$H_\nu(x,y) = \nu QN(x,y) + (1-\nu)G(x,y), \quad \nu\in[0,1],$$

其中,

$$G(x,y)=\begin{bmatrix}\overline{a}-\overline{b}\exp\{x\}\\ \overline{d}-\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{\kappa}^{\kappa+\omega}\dfrac{f(t)\exp\{x\}}{\alpha(t)+\beta(t)\exp\{x\}+\gamma(t)\exp\{y\}}\Delta t\end{bmatrix}.$$

由 (8.4.12), 容易证明, 对任意的 $\nu\in[0,1]$ 有 $0\notin H_\nu(\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L)$. 此外, 代数方程 $G(x,y)=0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有唯一解. 由同伦不变性, 直接计算得

$$\deg(JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=\deg(QN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)=\deg(G,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0)\neq 0,$$

其中, $\deg(\cdot,\cdot,\cdot)$ 为 Brouwer 度. 至此证明了 Ω 满足引理 8.4.1 的全部条件, 因此, $Lz=Nz$ 在 $\operatorname{Dom}L\cap\overline{\Omega}$ 中至少有一个解, 即 (8.4.1) 在 $\operatorname{Dom}L\cap\overline{\Omega}$ 中至少存在一个 ω 周期解. 证毕. ■

注 8.4.1 当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 时, 定理 8.4.1 即是文献 [45] 中的定理 3.2. 若 $\alpha(t)\equiv 0$, 则 (8.4.1) 就是所谓的比率型捕食者-食饵系统, 因为当 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ 时, (8.4.1) 就退化为连续[51] 或离散[52] 的比率型捕食者-食饵系统. 定理 8.4.1 统一并推广了文献 [51],[52] 的主要结果. 应用上面的方法, 在时标意义下, 可以对其他类型的捕食者-食饵系统及多物种生态竞争系统及其相应的离散化系统的周期解的存在性进行统一研究, 参见文献 [8].

注 8.4.2 文献 [60] 在 $a(t)>0$ 的假设下, 对定理 8.4.1 作了进一步改进, 去掉了 (8.4.5) 的第一个条件, 并将第二个条件改进为

$$(\overline{f}-\overline{d}\beta^u)\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\exp\{-2\overline{a}\omega\}-\overline{d}\alpha^u>0.$$

差分方程模型的一种导出方式就是作为相应微分方程模型的离散化近似. 例如, (8.4.4) 就是 (8.4.3) 的一种离散化近似, 但 (8.4.3) 的离散化近似不是唯一的. 由连续的微分方程模型导出相应的差分方程模型至少有两种常用的方法. 不失一般性, 仅以 Logistic 方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

为例, 介绍从微分方程导出离散差分方程的方法.

方法一 将导数离散化 (差商代替微商).

由导数定义有

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right),$$

将导数近似地用差商代替,

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\approx\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right).$$

令 $\Delta t = 1$ (一个种群世代), $t = n$, 记 $x(n) = x_n$, 以此强调处理的是离散时间问题. 于是

$$x_{n+1} = x_n + r x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right), \tag{8.4.13}$$

此即离散的 Logistic 模型, 更多地被称为 "虫口方程"、"Logistic 映射" 或 "二次映射". 在生态学应用中, (8.4.13) 存在很大的缺陷, 原因在于, 若在第 n 个世代时, 种群密度大于 $K(1+r)/r$, 则第 $n+1$ 个世代的种群的密度为负值. 这显然是不合理的. 例如, 当 $r = 2$ 时 (对生物种群而言, 这是一个相当典型的值, 此时周限增长率 $\lambda = e^2 \doteq 7$), 当 $x_n > 1.5K$ 时, x_{n+1} 就变成负值了.

方法二 此方法借助于具有逐段常数变元的常微分方程[171].

设 Logistic 方程所刻画的种群的相对增长率是规则变化的, 即在一个世代内保持不变, 在此假设下, Logistic 方程可改写为

$$\frac{1}{x(t)}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = r\left(1 - \frac{x([t])}{K}\right), \tag{8.4.14}$$

其中, $[t]$ 表示 t, $t \in (0, +\infty)$ 的整数部分. 方程 (8.4.14) 是具有逐段常数的常微分方程, 是介于差分方程和微分方程之间的一种方程类型.

方程 (8.4.14) 的解 $x(t)$ 是定义于 $[0, +\infty)$ 上且具有如下性质的函数:

(1) 在 $[0, \infty)$ 上连续;

(2) 在 $t \in [0, +\infty)/\{0, 1, 2, \cdots\}$ 存在导数, 在 $t \in \{0, , 1, 2, \cdots\}$ 存在左导数;

(3) 在 $[n, n+1)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 上满足方程 (8.4.14).

在区间 $[n, n+1), n = 0, 1, 2\cdots$, 积分方程 (8.4.14) 得

$$x(t) = x(n)\exp\left\{r\left(1 - \frac{x(n)}{K}\right)(t-n)\right\}, \quad n \leqslant t < n+1, n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{8.4.15}$$

令 $t \to n+1$ 有

$$x(n+1) = x(n)\exp\left\{r\left(1 - \frac{x(n)}{K}\right)\right\},$$

即

$$x_{n+1} = x_n \exp\left\{r\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)\right\}. \tag{8.4.16}$$

这样就得到了 Logistic 方程的又一种离散形式, 这就是著名的 Ricker 模型. 显然, 此模型避免了 Logistic 映射所存在的缺陷.

方法二等同于对 Logistic 方程首先作指数型变换 $x(t) = \exp\{u(t)\}$, 得到关于 $u(t)$ 的方程

$$u' = r\left(1 - \frac{\exp\{u\}}{K}\right),$$

然后再依据方法一对 $u(t)$ 的方程进行离散化, 再作逆变换 $u(t) = \ln\{x(t)\}$ 即可得到 Ricker 模型.

方法二的优点是适用范围广. 应用此方法可以对绝大多数连续种群动力学模型进行离散化近似, 原因在于绝大部分种群动力学模型都具有如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xf(\text{其他项}).$$

于是, 应用方法二就得到

$$x_{n+1} = x_n \exp\{f(\text{其他项})\}.$$

事实上, 很多的离散种群模型都是应用方法二得到的.

研究表明, 应用重合度理论, 常微分方程及应用第二种离散化方法所得到的离散化近似的差分方程的周期性在时标动力学方程意义下可以统一进行研究. 尽管第一种离散化方法在生态学应用中存在一定的缺陷, 在数学上, 我们的问题是: 常微分方程及应用第一种离散化方法所得到的离散化近似的差分方程的周期性在时标意义下是否可以统一进行研究呢? 相对而言, 后者更为困难. 文献 [183] 对此做了有益的尝试.

从目前来看, 时标动力学方程的研究仍然主要停留在理论研究层面. 尽管此理论在物理、生物、经济、金融、工程等领域有着非常深刻的实际背景, 但真正的实际问题的时标动力学方程模型尚不多见.

参考文献

[1] Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York, London: Academic Press, 1966.

[2] Aczel J. Functional Equations: History, Applications and Theory. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1984.

[3] Aczel J, Dhombres J. Functional Equations in Several Variables. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[4] Agarwal R P, Lakshmikantham V. Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations. Singapore: World Scientific Publishers, 1993.

[5] Arino O A, Burton T A, Haddock J R. Periodic solutions to functional differential equations. Proc Roy Soc Edinburgh, 1985, 101A: 253-271.

[6] Benkhalti R, Ezzinbi K. A Massera type criterion for some partial functional differential equations. Dyn Sys Appl, 2000, 9(2): 221-228.

[7] Bi L, Bohner M, Fan M. Periodic solutions of functional dynamic equations with infinite delay. Nonlinear Analysis TMA, 2008, 68(5): 1226-1245.

[8] Bohner M, Fan M, Zhang J M. Existence of periodic solutions in predator-prey and competition dynamic systems. Nonlinear Analysis RWA, 2006, 7(5): 1193-1204.

[9] Bohner M, Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Boston: Birkhäuser, 2001.

[10] Bohner M, Peterson A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales. Boston: Birkhäuser, 2003.

[11] Brauer F. Asymptotic stability of a class of integrodifferential equations. J Diff Eqs, 1978, 28: 180-188.

[12] Brewer D W. A nonlinear semigroup for a functional differential equation. Ph D Thesis, University of Wisconsin. Madison 1975, also Trans Amer Math Soc, 1978, 173: 236.

[13] Brouwder F E. On a generalization of the Schauder fixed point theorem. Duke Math J, 1959, 26:291-303.

[14] Burton T A. Oscillation, continuation and uniqueness of retarded differential equations. Trans Amer Math Soc, 1973, 5: 193-209.

[15] Burton T A. Stability theory for Volterra equations. J Diff Eqs, 1979, 32: 101-118.

[16] Burton T A. Boundedness in functional differential equations. Funcialaj Ekvacioj, 1982, 25: 51-77.

[17] Burton T A. Volterra Integral and Differential Equations. New York: Academic Press

1983.

[18] Burton T A. Periodic solutions of nonlinear Volterra equations. Funcialaj Ekvacioj, 1984, 27: 301-317.

[19] Burton T A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. New York: Academic Press, 1985.

[20] Burton T A. Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations. New York: Dover Publications, 2006.

[21] Burton T A, Dwiggins D P, Feng Y H. Periodic solutions of functional differential equations with infinite delay. J London Math Soc, 1989, 40(2):81-88.

[22] Burton T A, Huang Q C, Mahfoud W E. Rate of decay of solutions of Volterra equations. Nonlinear Analysis TMA, 1985, 9: 651-663.

[23] Burton T A, Zhang B. Uniform ultimate boundedness and periodicity in functional differential equations. Tohoku Math J, 1990, 42: 93-100.

[24] Burton T A, Zhang S N. Unified boundedness, periodicity and stability in ordinary and functiona differential equations. Ann Mat Pura Appl, 1986, 145(4): 129-158.

[25] Cartwright M L. Forced oscillations in nonlinear systems//(Lefschetz S ed.) Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol.1. Annals of Mathematics Studies 20. Princeton: Princeton University Press, 1950, 149-241.

[26] Castillo E, Ruiz-Cobo M R. Functional Equations and Modelling in Science and Engineering. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, 1992.

[27] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法. 成都: 四川科技出版社, 2004.

[28] Chen Y Q. On Massera's theorem for anti-periodic solution. Adv in Math Sci Appl, 1999, 9: 125-128.

[29] Chow C N. Remarks on one dimensional delay-differential equations. J Math Anal Appl, 1973, 41: 426-429.

[30] Coleman B D, Mizel V J. On the general theory of fading memory. Arch Rational Mech Anal, 1968, 29(1): 18-31.

[31] Coleman B D, Mizel V J. On the stability of solutions of functional differential equations. Arch Rational Mech Anal, 1968, 30(3): 173-196.

[32] Colombo R M, Fryszkowski A, Rzezuchowski T, et al. Continuous selections of solution sets of Lipschitzean differential inclusions. Funcialaj Ekvacioj, 1991, 34: 321-330.

[33] Corduneanu C, Lakshmikantham V. Equations with unbounded delay: A survey. Nonlinear Analalysis TMA, 1980, 4: 831-877.

[34] Cushing J M. Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics. Lecture Notes in Biomathematics 20. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1977.

[35] Daróczy Z, Páles Zs. Functional Equations: Results and Advances. Dordercht, London: Kluwer Academic, 2002.

[36] Dieudonne J. Foundations of Modern Analysis. New York, London: Academic Press,

1960.

[37] Ding T R. An extension of the Massera theorem. Acta Math Sinica, 1989, 5: 159-164.

[38] 迪申加卜, 范猛, 王克. 具无限时滞中立型泛函微分方程解的稳定性与有界性. 数学物理学报, 2005, 25A(5): 593-603.

[39] 迪申加卜, 王克. 无限时滞泛函微分方程解的稳定性和有界性. 数学学报, 1997, 40(4):511-520.

[40] Dishen J B, Wang K. Uniformly asymptotic stability and existence of almost periodic solutions for functional differential equations. Northeast Math J, 1999, 15(1):32-38.

[41] Dixon S R, Anthony F G. Population dynamics of tree-dwelling aphids: the importance of seasonality and time scale. Ecology, 1997, 78(8): 2603-2610.

[42] Driver R D. Existence and stability of solutions of a delay differential system. Arch Rational Mech Anal, 1962,10: 401-426.

[43] Ezzinbi K, Fatajou S, et al. Massera-type theorem for the existence of $C(n)$-almost-periodic solutions for partial functional differential equations with infinite delay. Nonlinear Analysis TMA, 2008, 69(4): 1413-1424.

[44] Fan M, Dishen J B, Wang Q, et al. Stability and boundedness of solutions of neutral functional differential equations. J Math Anal Appl, 2002, 276(2):545-560.

[45] Fan M, Kuang Y. Dynamics of a nonautonomous predator-prey system with the Beddington-DeAngelis functional response. J Math Anal Appl, 2004, 295(1): 15-39.

[46] Fan M, Wang K. Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients. Math Biosci, 1998, 152(2): 165-177.

[47] 范猛, 王克. 具有限时滞中立型泛函微分方程周期解. 科学通报, 1998, 43(23): 2498-2502.

[48] 范猛, 王克. 一致最终有界性与无限时滞泛函微分方程周期解. 系统科学与数学, 1999, 19(3): 323-327.

[49] 范猛, 王克. 具无限时滞线性中立型泛函微分方程周期解. 数学学报, 2000, 43(4): 696-702.

[50] Fan M, Wang K. Periodic solutions of convex neutral functional differential equations. Tohoku Math J, 2000, 52: 47-59.

[51] Fan M, Wang K. Periodicity in a delayed ratio-dependent predator-prey system. J Math Anal Appl, 2001, 262(1):179-190.

[52] Fan M, Wang K. Periodic solutions of a discrete time nonautonomous ratio-dependent predator-prey system. Math Comput Model, 2002, 35:951-961.

[53] 范猛, 王克. Yoshizawa 型周期解定理和 Massera 型周期解定理研究进展简介. 数学进展, 2003, 32(3): 295-302.

[54] Fan M, Wang K, Agarwal R P. Periodic solutions of neutral functional differential equations with infinite delay. Dyn Contin Discrete Impuls Syst (A), 2005, 12(1): 129-137.

[55] 范猛, 王克, 李宪高. 容许空间对中解的有界性之间的等价关系. 广西教育学院学报, 1998, 2: 113-118.

[56] Fan M, Wang K, Wong P J Y, et al. Periodicity and stability in periodic n-species Lotka-Volterra competition system with feedback controls and deviating arguments. Acta Math Sin, 2003, 19(4): 801-822.

[57] Fan M, Wang Q. Periodic solutions of a cass of nonautonomous discrete time semi-ratio-dependent predator-prey systems. Discrete Cont Dyn S-B, 2004, 4(3): 563-574.

[58] Fan M, Wang Q, Zou X Y. Dynamics of a nonautonomous ratio-dependent predator-prey system. Proc Roy Soc Edinburgh-A, 2003, 133: 97-118.

[59] Fan M, Zou X F. Global asymptotic stability of a class of nonautonomous integro-differential systems and applications. Nonlinear Analysis TMA, 2004, 57: 111-135.

[60] Fazly M, Hesaaraki M. Periodic solutions for predator-prey systems with Beddington-DeAngelis functional response on time scales. Nonlinear Analysis RWA, 2008, 9: 1224-1235.

[61] Franklin J. On the existence of solutions of systems of functional differential equations. Proc Amer Math Soc, 1954, 5: 363-369.

[62] 盖明久, 时宝, 张德存. 一类泛函微分方程解的存在唯一性. 工程数学学报, 2003, 20(4): 105-108.

[63] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[64] 高国柱. 中立型泛函微分方程周期解. 数学年刊, 1988, 9A(3): 263-269.

[65] Gopalsamy K. Global asymptotic stability in a periodic integrodiferential system. Tohoku Math J, 1985, 37: 323-332.

[66] Haddad G, Lasry M. Periodic solutions of functional differential inclusions and fixed points of σ-selectionable correspondence. J Math Anal Appl, 1983, 96: 295-312.

[67] Haddock J R. Friendly spaces for functional-differential equations with infinite delay. Trends in the theory and practice of nonlinear analysis (Arlington, Tex., 1984), 173-182, North Holland Math. Stud, 110, Nonth-Holland, Amesterdam, 1985.

[68] Haddock J, Terjeki J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations. J Diff Eqs, 1983, 48: 95-122.

[69] Halanay A, Yorke J. Some new results and problems in the theory of differential-delay equations. SIAM Review, 1971, 13:55-80.

[70] Hale J K. Dynamical systems and stability. J Math Anal Appl, 1969, 26: 39-59.

[71] Hale J K, Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay. Funcialaj Ekvacioj, 1978, 21: 11-41.

[72] Hale J K, Lopes O. Fixed-point theorems and dissipative process. J Diff Eqs, 1973, 13: 391-402.

[73] Hale J K, Lunel S M V. Introduction to Functional Differential Equations. New York:

Springer-Verlag, 1993.

[74] Hamaya Y. Periodic solutions of nonlinear integrodifferential equations. Tohoku Math J, 1989, 41: 105-116.

[75] Han L, Wang K, Fan M. Existence of periodic solutions of differential inclusions. (to appear).

[76] He M, Huang Q C, Wang K. Phase spaces $\mathscr{C}_g, \mathscr{C}_h$, and g-uniform boundedness of FDEJ(ID). J Math Anal Appl, 1989, 138: 473-490.

[77] 何敏, 王克. h-有界性与 $\mathbb{R}^n$ 有界性的等价关系. 东北师大学报, 1989, 1: 9-14.

[78] Hernández E M. A Massera type criterion for a partial neutral functional differential equation. EJDE, 2002, 40: 1-17.

[79] Hilger S. Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, universität Würzburg, 1988.

[80] Hilger S. Analysis on measure chains: a unified approach to continuous and discrete calculus. Results in Math, 1990, 18: 18-56.

[81] Hino Y. Stability and existence of almost periodic solutions of functional differential equations with infinite retardation. Proc Symp RIMS Kyoto Univ, 1977, 70-83.

[82] Hino Y. Almost periodic solutions of functional differential equations with infinite retardation. Funcialaj Ekvacioj, 1978, 21: 139.

[83] Hino Y, Murakami S. Almost automorphic solutions for abstract functional differential equations. J Math Anal Appl, 2003, 286(2): 741-752.

[84] Hino Y, Murakami S, Naito T. Functional differential equations with infinite delay. Lecture Notes in Mathematics, 1473. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[85] Hong S H. Boundary value problems for first and second order functional differential inclusions. EJDE, 2003, 32: 1-10.

[86] Horn W A. Some fixed point theorems for compact maps and flows in Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 1970, 149: 391-404.

[87] 黄启昌. 具无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性. 中国科学 (A), 1984, 10: 881-889.

[88] 黄启昌. 具无限时滞泛函微分方程的一致渐近性态. 东北师大学报, 1984, 1: 13-25.

[89] Hutson V. A theorem on averge Lipaunov functions. Monatsh Math, 1984, 98: 267-275.

[90] Hutson V, Schmitt K. Permanence in dynamical systems. Math Biosci, 1992, 111: 1-71.

[91] Jin Z, Ma Z E, Han M A. The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competition systems with impulsive. Chaos Solitons Fractals, 2004, 22(1): 181-188.

[92] Kaminoho K. Kneser's property and boundary value problem for some retarded functional differential equations. Tohoku Math J, 1978, 30: 471-486.

[93] Kappel F. The invariance of limit set for autonomous functional differential equations. SIAM J Appl Math, 1970, 19(2): 408-419.

[94] Kappel F, Schappacher W. Some considerations to the fundamental theory of infinite delay equations. J Diff Eqs, 1980, 37: 141-183.

[95] Kato J. On Liapunov-Razumikhin type theorems for functional differential equations. Funcialaj Ekvacioj, 1973, 16: 225-239.

[96] Kato J. Stability problems in functional differential equations with infinite delay. Funcialaj Ekvacioj, 1978, 21: 63-80.

[97] Kato J. An autonomous system whose solutions are uniformly ultimately bounded but not uniformly bounded. Tohoku Math J, 1980, 32: 499-504.

[98] Krasovskii N N. Stability of Motion. Stanford: Stanford University Press, 1963.

[99] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, volume 191 in the series of Mathematics in Science and Engineering. New York: Academic Press, 1993.

[100] Levinson N. Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order. Ann Math, 1944, 45(2): 723-737.

[101] Li J W, Wang G Q. Sharp inequalities for periodic functions. Appl Math E-Notes, 2005, 5: 75-83.

[102] 李森林, 温立志. 泛函微分方程. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1987.

[103] 李晓颖. 关于 Massera 及 Yoshizawa 周期解定理的推广. 东北师大学报, 1987, 1: 11-15.

[104] Li Y,Cong F Z, Lin Z H, et al. Periodic solutions for evolution equations. Nonlinear Anal TMA, 1999, 36(3):275-293.

[105] Li Y, Lin Z H. A Massera type criterion for linear functional differential equations with advance and delay. J Math Anal Appl, 1996, 20(8):717-725.

[106] Li Y, Wang H Z, Lu X R. Equilibrium of multivalued permanent systems with nonconvex right-hand side. Quart Appl Math, 1995, 56: 673-678.

[107] Li Y, Zhou Q D, Lu X R. Periodic solutions for functional differential inclusions with infinite delay. Sci China-A, 1994, 37: 1289-1301.

[108] Li Y, Zhou Q D, Lu X R. Periodic solutions and equilibrium states for functional differential inclusions with nonconvex right-hand side. Quart Appl Math, 1997, 58: 57-68.

[109] 林发兴. 一致渐近稳定和周期解、概周期解的存在性. 中国科学 (A), 1994, 24(4):361-370.

[110] Liu B. Controllability of impulsive neutral functional differential inclusions with infinite delay. Nonlinear Analy TMA, 2005, 60(8): 1533-1552.

[111] Liu J H. Bounded and periodic solutions of differential equations in Banach space. J Appl Math Comput, 1994,65:141-150.

[112] Liu J H. Bounded and periodic solutions of semilinear evolution equations. Dynam

Syst Appl, 1995, 4:341-350.

[113] Liu J H. Bounded and periodic solutions of finite delay evolution equations. Nonlinear Anal TMA, 1998, 34:101-111.

[114] Liu J H. Periodic solutions of infinite delay evolution equations. J Math Anal Appl, 2000, 247:627-644.

[115] Liu X L, Li W T. Periodic solutions for dynamic equations on time scales. Nonlinear Anal TMA, 2007, 67: 1457-1463.

[116] 陆征一, 王稳地. 生物数学前沿. 北京: 科学出版社, 2008.

[117] Lv X R, Shi S Y, Li X G. Periodic solutions for functional differentiale inclusion with nonconvex right hand sides. Northeast Math J, 2003, 19(4): 396-406.

[118] 马世旺, 庾建设. Yoshizawa 周期解定理的推广. 湖南大学学报, 1996, 12(6): 27-29.

[119] 马知恩, 周义仓, 王稳地等. 传染病动力学的数学建模与研究. 北京: 科学出版社, 2004.

[120] Makay G. Periodic solutions of linear differential and integral equations. Diff Int Eqs, 1995, 8(8): 2177-2187.

[121] Massera J L. The existence of periodic solutions of systems of differential equations. Duke Math J, 1950, 1: 149-241.

[122] Miller R K. Asymptotic stability properties of linear Volterra integrodifferential equations. J Diff Eqs, 1971, 10: 485-506.

[123] Mishkis A D. General theory of differential equations with a retarded argument. Trans Amer Math Soc, 1951, 55: 99-141.

[124] Murakami S. Almost periodic solutions of a system of integrodifferential equations. Tohoku Math J, 1987, 39: 71-79.

[125] Murakami S, Naito T, Minh N V. Massera's theorem for almost periodic solutions of functional differential equations. J Math Soc Japan, 2004, 56(1): 247-268.

[126] Murthy P. Periodic solutions of two-dimensional forced systems: the Massera theorem and its extension. J Dynam Diff Eqs, 1998, 10(2):275-302.

[127] Naito T. Adjoint equations of autonomous linear functional differential equations with infinite retardations. Tohoku Math J. 1976, 28: 135-143.

[128] Naito T. On linear autonomous retarded equations with an abstract phase space for infinite delay. Proc Symp RIMS Kyoto Univ, 1977, 89-96.

[129] Parratt M. Convergence of solutions of infinite delay differential equations with an underlying space of continuous functions. Lecture Notes in Math. New York: Springer-Verlag, 1981.

[130] 彭世国, 朱思铭. 无限时滞泛函微分方程的正周期解. 数学年刊, 2004, 25(3): 285-292.

[131] Plaskacz S. Periodic solutions of nonlinear functional differential inclusions on compact subsets of $\mathbb{R}^n$. J Math Anal Appl, 1990, 148: 202-212.

[132] Sansone G, Conti R. Equazioni differenziali non lineari, Monografie Mat. III, Roma 1956, Revised Edition in English. New York: Pergamon Press, 1964. (中译本: 非线性

微分方程. 黄启昌, 金成桴, 史希福译. 现代科学译丛. 北京: 科学出版社, 1983.)
[133] Sawano K. Exponential asymptotic stability for functional differential equations wity infinite retardations. Tohoku Math J, 1979, 31: 363-382.
[134] Schumacher K. Existence and continuous dependence for differential equations with unbounded delay. Arch Rational Mech Anal, 1978, 67: 315-335.
[135] Schumacher K. Dynamical systems with memory on history-spaces with monotonic seminorms. J Diff Eqns, 1979, 34: 440-463.
[136] Seifert G. On Carathéodory conditions for functional equations with infinite delays. Rocky Mountain J Math, 1982, 12: 615-619.
[137] 时宝. 具有无穷时滞的 Volterra 反应扩散方程组正解与有界正解的存在唯一性. 数学学报, 2000, 43(3): 545-554.
[138] 时宝, 张德存, 盖明久. 微分方程理论及应用. 北京: 国防工业出版社, 2005.
[139] 石磊. 具无限时滞中立型泛函微分方程解的有界性和周期性. 科学通报, 1990, 35(6): 409-411.
[140] Teng Z D. Nonautonomous Lotka-Volterra systems with delays. J Diff Eqs, 2002, 179(2): 538-561.
[141] Thieme H R. Persistence under relaxed point-dissipativity (with applications to an epidemic model). SIAM J Math Anal, 1993, 24: 407-435.
[142] Thieme H R. Uniform persistence and permanence for nonautonomous semiflows in population biology. Math Biosci, 2000, 166: 173-201.
[143] Waltman P. A brief survey of persistence in dynamical systems// Delay Differential Equations and Dynamical Systems, Lect. Notes in Math. 1475,31-40, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
[144] Wang H Y. Positive periodic solutions of functional differential equations. J Diff Eqns, 2004, 202(2): 354-366.
[145] 王克. LaSalle 定理的推广. 应用数学学报, 1986, 9(3): 273-281.
[146] 王克. 无限时滞泛函微分方程周期解的存在性. 数学年刊, 1987, 8A(4): 514-517.
[147] 王克. 关于泛函微分方程周期解的存在性. 数学年刊, 1989, 10A(3): 366-372.
[148] 王克. Massera 定理的拓广. 数学物理学报. 1990, 10(2): 197-199.
[149] 王克. 具无限时滞和无界时滞的卷积 Volterra 方程稳定性的等价性. 数学物理学报, 1990, 12: 80-82.
[150] 王克. 具无限时滞的泛函微分方程的渐近稳定性. 东北师大学报, 1992, 2: 1-9.
[151] 王克. g-稳定性与 $\mathbb{R}^n$ 稳定性的等价性. 系统科学与数学, 1993, 13(2): 185-189.
[152] Wang K. Uniform asymptotic stability in functional differential equations with infinite delays. Ann Diff Eqs, 1993, 9(3): 325-335.
[153] 王克. 泛函微分方程的全局稳定周期解. 数学学报, 1994, 4: 570-573.
[154] 王克. 多物种生态系统的周期正解. 应用数学学报, 1994, 17(1): 1-8.
[155] 王克. 具无限时滞的非自治捕食者-食饵系统的持久性. 数学学报, 1997, 40(3): 321-332.

[156] Wang K. Persistence of nonautonomous competitive systems with infinite delay. Acta Math Appl Sin, 1998, 14(3): 333-336.

[157] 王克, 范猛. 泛函微分方程相空间理论及其应用简介. 东北师大学报, 1999, 31(12): 42-51.

[158] Wang K, Fan M. Positive periodic solutions of predator-prey systems with infinite delay. Chin Ann Math, 2000, 21B(1): 43-54.

[159] Wang K, Fan M. Necessary and sufficient criteria for the uniqueness of solutions to IVPs of scalar autonomous ODEs. Nonlinear Analy TMA, 2004, 59: 917-929.

[160] Wang K, Fan M. Permanence of predator-prey system of one predator and several preys with infinite delay. Can Appl Math Q, 2006, 14(1): 71-105.

[161] Wang K, Fan M, Agarwal R P, et al. Basic theory of functional equations with infinite delay. Funct Diff Eqs, 2004, 11(1, 2): 203-220.

[162] Wang K, Fan M, Li Y M. Periodic wave wolutions for quasi-linear partial differential equations of first order. Rocky Mountain J Math, 2006, 36(5): 1715-1727.

[163] Wang K, He M. The equivalences Between h-stability and $\mathbb{R}^n$-stability. Ann Diff Eqs, 1987, 3(2): 203-212.

[164] 王克, 黄启昌. $|\cdot|_h$ 模与 Volterra 积分微分方程的周期解. 东北师大学报, 1985, 3: 7-17.

[165] 王克, 黄启昌. h 有界与具无穷时滞的泛函微分方程的周期解. 科学通报, 1986, 31(15): 1121-1123.

[166] 王克, 黄启昌. C_h 空间与无限时滞的泛函微分方程解的有界性及周期解. 中国科学 (A), 1987, 3: 242-252.

[167] Wang Q, Fan M, Wang K. Dynamics of a class of nonautonomous semi-ratio-dependent predator-prey systems with functional responses. J Math Anal Appl, 2003, 278(2): 443-471.

[168] 魏凤英. 无限时滞随机泛函微分方程的基本理论. 东北师范大学博士学位论文, 2006.

[169] 魏俊杰. 含有脉冲的微分系统的 Massera 定理//王联, 蒲富全, 刘永清等编. 常微分方程理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1992, 163-164.

[170] 文贤章, 王志成. 具无限时滞的周期系统的持久性与正周期解. 数学年刊, 2003, 24A(5): 615-624.

[171] Wiener J. Differential equations with piecewise constant delays, in Trends in the Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations (Arlington, Tex, 1982), 547-552, Lecture Notesion Pure and Appl Nath, 90, Deckker, New York, 1984. New York: Marcel Dekker, 1983: 547-552.

[172] 吴建宏. 无穷时滞中立型泛函微分方程的局部理论. 应用数学学报, 1985, 8(4):472-481.

[173] Wu J H. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

[174] Wu J H. On the boundedness of solutions of differential equations. Ann Diff Eqs, 1986, 2(3): 327-341.

[175] Wu J H. Extension of invariance principle to non-autonomous functional differential equations. J of Hunan Univ, 1988, 15(1): 204-213.

[176] Xia Z N, Fan M, Zhu H P. Asymptotic stability of delay differential equations via fixed point theory. preprint.

[177] 徐志庭, 温立志. 无穷延滞 NFDE 解的 L_p 有界性与周期解//王联, 蒲富全, 刘永清等. 常微分方程理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1992, 77-78.

[178] 杨喜陶, 杨晓爱. Yoshizawa 周期解定理的推广. 数学理论与应用, 2000, 20(2): 40-43.

[179] Ye D, Fan M, Wang H Y. Periodic solutions for scalar functional differential equations. Nonlinear Anal TMA, 2005, 62: 1157-1181.

[180] Yoshizawa T. Stability by Liapunov Second Method. Tokyo: Math Soc Japan, 1966.

[181] 张冰冰, 范猛. 关于应用重合度研究时标动力学方程周期解的注记. 东北师大学报, 2007, 39(1): 1-3.

[182] Zhang B. Space C_g and uniform Behavior of solutions of functional differential equations with infinite delay. Acta Math Sin, 1988, 2: 177-188.

[183] Zhang J M, Fan M, Zhu H P. Periodic solutions of single population models on time scales. preprint.

[184] Zhang S N. Periodicity in functional differential equations. Ann Diff Eqs, 1996, 12(2): 252-257.

[185] Zhang S N, Li W T. Periodic solutions of neutral difference equations. Comput Math Appl, 2003, 45(6-9): 1245-1251.

[186] Zhang T L, Teng Z D. On a nonautonomous SEIRS model in epidemiology. Bull Math Biol, 2007, 69: 2537-2559.

[187] Zhang W P, Fan M. Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays. Math Comput Model, 2004, 39(4, 5): 479-493.

[188] Zhao X Q. Dynamical Systems in Population Biology. New York: Springer-Verlag, 2003.

[189] 郑祖庥. 泛函微分方程的发展和应用. 数学进展, 1983, 2: 94-111.

[190] 郑祖庥. 泛函微分方程理论. 合肥: 安徽教育出版社, 1992.

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著